

PHYSIKALISCH MODELLIERTE OBJEKTE
IN
VIRTUELLEN UMGEBUNGEN

Diplomarbeit, vorgelegt von Dirk Stegemann

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
Institut für Informatik III

Juni 1999

Versicherung

Hiermit versichere ich an Eides statt, daß ich die vorliegende Arbeit „Physikalisch modellierte Objekte in virtuellen Umgebungen“ selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Köln, den 25.Juni 1999

Dirk Stegemann

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	6
1.1	Motivation	6
1.2	Zielsetzung	7
1.3	Aufbau der Arbeit	7
2	Physikalische Voraussetzungen	8
2.1	Mechanik	8
2.2	Kinematik	8
2.3	Kinetik	10
2.4	Kräfte	10
2.4.1	Newtonsche Axiome	10
2.4.2	Drehmoment	11
2.4.3	Kräftenarten	11
2.4.4	Trägheitskräfte	13
2.4.5	Schwerpunktsatz	13
2.4.6	Impulssatz	14
2.5	Statik	14
2.6	Energie und Arbeit	14
2.6.1	Arbeit	15
2.6.2	Energiesatz	15
2.6.3	Kinetische Energie	15
2.6.4	Das Potential	15
2.6.5	Massenträgheitsmoment	16
2.6.6	Rotationsenergie	17
2.6.7	Drehimpuls	17
2.6.8	Translation und Rotation	17
2.6.9	Energieerhaltungssatz	18
2.7	Zwangsbedingungen	18
2.7.1	Generalisierte Koordinaten	19
2.7.2	Holonome Nebenbedingungen	19
2.7.3	Bewegungsgleichung mit Nebenbedingungen	20
3	Physikalische Prinzipien	21
3.1	Virtuelle Verschiebung	22
3.2	d'Alembert	23

3.2.1	Bewegungsgleichung von d'Alembert	23
3.2.2	Prinzip der virtuellen Arbeit	24
3.2.3	d'Alembert und Newton	25
3.3	Lagrange	26
3.3.1	Lagrangesche Bewegungsgleichung	26
3.3.2	Lagrangesche Gleichung 2.Art	28
3.3.3	Lagrange mit Reibung	30
3.3.4	Hamilton	30
3.4	Zusammenfassung	31
4	Numerische Integration	33
4.1	Anfangswertproblem	33
4.1.1	Integral des AWP	33
4.1.2	Ordnungsreduktion	34
4.2	Klassifikation der Methoden	35
4.2.1	Taylor	36
4.2.2	Euler	37
4.3	Fehlerordnung	38
4.4	Runge Kutta	39
4.4.1	Runge-Kutta 2.Ordnung	40
4.4.2	Runge-Kutta 4.Ordnung	41
4.4.3	Schrittweitensteuerung	43
4.4.4	Mehrschrittverfahren	44
4.4.5	Stabilität	45
5	Physikalische Objekte	47
5.1	Pendel	47
5.1.1	Die Generalisierten Koordinaten des Pendels	48
5.1.2	Die Bewegungsgleichung des Pendels	49
5.2	Das Doppelpendel	51
5.2.1	Generalisierte Koordinaten des Doppelpendels	51
5.2.2	Energien des Doppelpendels	52
5.2.3	Die Bewegungsgleichung	53
5.3	Federpendel	56
5.3.1	Generalisierte Koordinaten des Federpendels	57
5.3.2	Energien des Federpendels	57
5.3.3	Die Bewegungsgleichung	58
6	Zusammenfassung	60
A	Implementation der numerischen Methode	62
B	Klassen der Beispielobjekte	64
B.1	t_Pendulum	64
B.2	t_doublependulum	66
B.3	t_featherpendulum	68

C Graphische Darstellung	69
C.1 Hilfsklassen	69
C.2 Beispielanwendung	70
Literaturverzeichnis 74	

Kapitel 1

Einleitung

Einfache Staubpartikel im Raum, pendelnde Grashalme im Wind oder das Pendel einer Uhr sind physikalische Objekte, die mit Hilfe physikalischer Gesetze beschrieben und analysiert werden können. Die Darstellung solcher bewegter Objekte in Computersystemen beinhaltet immer das Problem, inwieweit eine realistische Abbildung der wirklichen Verhältnisse in einer virtuellen Welt möglich ist b.z.w. noch sinnvoll ist. D.h. im Bereich *physically based modeling* wird man bei der Modellierung natürlicher b.z.w. mechanischer Vorgänge, die Effizienz der Bewegungsrechnungen und der graphischen Darstellung in den Computersystemen berücksichtigen müssen. Diese Berücksichtigung verlangt eine schrittweise Entwicklung von einfachen Bewegungsmodellen bis zu komplizierten Bewegungsrechnungen für komplexe natürliche Systeme.

1.1 Motivation

Als Ausgangspunkt dient die Arbeit von Witkin [WKBB92], in der neben der numerischen Problematik einfache physikalische Modelle für die Bewegungsrechnungen im Rahmen der Newton Mechanik vorgestellt werden. Dabei dient das *Particle* als Modell eines Massenträgers dessen freie Bewegung durch das Modell der *Kräftefelder* und *Strömungsfelder* beeinflusst ist. Das Modell von Partikel und Strömungsfelder diente als Grundlage eines Partikelsystems, das im Rahmen eines Praktikums von Kurtenbach und Stegemann erarbeitet wurde. In diesem System wurden Strömungsverhältnisse durch einfache sogenannte Flußprimitive, wie Wirbel, punktförmiger Sog, gleichförmiger Wind usw. modelliert. Ein *Particle*, besitzt dabei schon physikalische Eigenschaften, wie Geschwindigkeit und Beschleunigung. Die *Particles* wurden zunächst dargestellt als einfache Punkte ohne geometrische Ausmaße, ohne gegenseitige Beeinflussung, sie dienten nur der Veranschaulichung der simulierten Strömungsverhältnisse. Bekommen die Objekte geometrische Gestalt, so erhöhen sich die Freiheitsgrade der Objekte und die gegenseitige Beeinflussung. Weitere Überlegungen führen zum Problem der Kollisionserkennung (*collision detection*) als auch zu Reaktion auf Kollision (*collision response*), welche in der Arbeit von Kurtenbach [Kur98] beschrieben werden.

Die vorliegende Arbeit greift das Gebiet der Bewegungsanalyse mechanischer Systeme auf. Die Kennzeichnung dieser Systeme ist, daß der Konfigurationsraum dieser Systeme bestimmt ist, durch dem System auferlegte Nebenbedingungen.

Für die Bewegungsbeschreibung einfacher physikalischer Objekte, wie Partikeln, die unterschiedlichen Kraftfeldern ausgesetzt sind, reichen die Newtonschen Axiome völlig aus. Doch bei kom-

plizierteren Systemen deren Freiheitsgrade durch verwickelte Zwangsbedingungen eingeschränkt wird, ist eine Erweiterung der physikalischen Werkzeuge gefragt.

1.2 Zielsetzung

Ziel der Arbeit ist die Entwicklung eines Verfahrens, welches auf einfache Weise erlaubt, komplexe physikalische Systeme mit Nebenbedingungen zu analysieren, um sie dann leicht in ein virtuelles Umfeld zu implementieren. Dabei werden Verfahren der klassischen Mechanik verwendet. Das virtuelle Umfeld sind die Werkzeuge der Computergrafik. Die erarbeiteten mechanischen Beispielsysteme werden dargestellt mit Hilfe der 2D-Grafikchnittstelle CGI [FF93], die mit einfachen graphischen Elementen eine schnelle visuelle Kontrolle der bewegten Systeme erlaubt.

1.3 Aufbau der Arbeit

Geeignete Werkzeuge für die Erfassung und die Analyse bewegter physikalischer Objekte stellt die klassische Mechanik, mit den Bereichen Statik, Kinematik und Kinetik bereit. Grundlage der klassischen Mechanik bilden die Newtonschen Axiome. Besonders die von Newton aufgestellte Definition der Kraft, $\vec{F} = m\vec{a}$, dient als Grundlage zur Aufstellung von Bewegungsgleichungen.

In Kapitel II werden diese Grundlagen vorgestellt, es werden mathematische und physikalische Begriffe eingeführt, um Bewegungsvorgänge zu beschreiben. Da die Newtonschen Axiome für die Beschreibung der Bewegung von Systemen mit verwickelten Nebenbedingungen zu un bequem anwendbar sind, werden in Kapitel III weitere Prinzipien der Physik beschrieben, die die Analyse der komplexeren Systeme vereinfacht. Für die Beschreibung von Bewegung mit Zwangsbedingungen stellt der Lagrangeformalismus ein ideales Werkzeug dar. Da für die Beschreibung physikalischer Systeme nicht immer eine allgemeine Lösung existiert, werden numerische Verfahren benötigt. Das Prinzip solcher Verfahren wird in Kapitel IV beschrieben.

Die aufgestellten Voraussetzungen kommen in Kapitel V zur Anwendung. Anhand der beschriebenen Beispielobjekte wird nochmals die Einfachheit des Lagrangformalismus verdeutlicht.

Überleitung zum praktischen Teil dieser Arbeit bildet im letzten Teil die Entwicklung geeigneter Basisklassen und die Implementierung der physikalischen Objekte. Die Implementation ist in der Programmiersprache C++. Die graphische Plattform bildet die Grafikschnittstelle CGI.

Für die Möglichkeit dieser Arbeit möchte ich mich an dieser Stelle bei Herrn Professor D.W.Fellner bedanken. Für die Unterstützung danke ich besonders Herrn Gordon Müller.

Kapitel 2

Physikalische Voraussetzungen

In diesem Kapitel werden mathematische und physikalische Begriffe eingeführt, um Bewegung zu beschreiben, um Gesetze der Bewegung zu formulieren und Bewegungsabläufe berechnen zu können. Diese Grundgesetze werden in der Physik Axiome oder Prinzipien genannt, d.h. sie sind nicht beweisbar, sondern stellen zusammengefasste Erfahrung dar. Es ist nicht möglich mit diesen Grundgesetzen, den Denkmodellen und den Grundbegriffen der Mechanik, wie Massenpunkt, Massenpunktsystemen, starrer Körper, Kraft, Arbeit, Impuls usw., jede Bewegung und Erscheinung der unbelebten Natur erfassen zu können. Trotzdem versucht die Mechanik Methoden für die Aufstellung von Bewegungsgleichungen zu liefern, die es ermöglichen, den Ablauf der Bewegung, d.h., die Bahn eines mechanischen Systems und den Zeitverlauf der Bewegung zu ermitteln, wenn es der Einwirkung von Kräften unterworfen ist. In dieser Arbeit wird sich herausstellen, daß die von der Physik erarbeiteten Prinzipien ein hervorragendes Werkzeug darstellen, um natürliche mechanische Systeme in künstliche Umgebungen zu implementieren. In diesem Kapitel werden die physikalischen Begriffe und Beziehungen beschrieben, die für das folgende Kapitel und die physikalischen Objekte von Bedeutung sind.

2.1 Mechanik

Die Mechanik stellt sich die Aufgabe, die Gesetze der Bewegung von Massenpunkten, Massenpunktsystemen und starren Körpern aus wenigen Grundgesetzen abzuleiten. Die Mechanik befaßt sich mit der Statik, der Kinematik und der Kinetik oder Dynamik. Dynamik bezeichnet die Lehre von den Kräften und dient als Oberbegriff für Statik und Kinetik.

2.2 Kinematik

Die Kinematik ist die Lehre vom geometrischen und zeitlichen Ablauf von Bewegungen ohne nach Ursachen und Wirkungen der Bewegung zu fragen.

In den weiteren Abschnitten, werden die hier definierten Begriffe, wie Geschwindigkeit, Beschleunigung und Winkelgeschwindigkeit bzw. Winkelbeschleunigung von Massenpunkten verwendet.

Die Bewegung eines mechanischen Systems ist erst dann vollständig beschrieben, wenn der Ortsvektor $r(t)$ eines jeden zum System gehörenden Teiles bestimmt worden ist. Diese Aufgabe ist für reale technische Konstruktionen im allgemeinen nur näherungsweise zu lösen. Die tatsächlichen Verhältnisse werden durch Modellvorstellungen ersetzt. Diese bestehen darin, daß verschiedene für den Ablauf des Geschehens unwesentliche Einzelheiten, die die Beschreibung der Vorgänge erschweren oder unmöglich machen, vereinfacht oder zunächst nicht berücksichtigt werden. Die so erhaltenen Ergebnisse sind anschließend darauf zu überprüfen, ob die Vereinfachungen zulässig sind.

Das einfachste mechanische Modell eines Körpers ist der *Massenpunkt*. Der Begriff Massenpunkt drückt aus, daß für einen gerade interessierenden Fall ein realer Körper durch einen einzelnen ausgewählten Punkt des Körpers, z.B. des Massenmittelpunktes, ersetzt werden kann.

Die Beschreibung der Bewegung eines Massenpunktes bedeutet die Angabe des Ortes, an dem sich der Massenpunkt zu einer vorgegebenen Zeit befindet, seiner Geschwindigkeit und seiner Beschleunigung.

Zur Beschreibung einer Bewegung wird ein Bezugssystem benötigt. Seien e_x, e_y und e_z die Einheitsvektoren des Bezugssystems. In kartesischen Koordinaten x, y und z wird die Angabe der Bahnkurve eines Massenpunktes durch Angabe der drei Zeitfunktionen $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ beschrieben. Diese Funktionen werden durch den Ortsvektor $r(t)$ zusammengefaßt:

$$r(t) = x(t)e_x + y(t)e_y + z(t)e_z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Die Geschwindigkeit v ist definiert als Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit:

$$v(t) = \dot{r}(t) = \dot{x}(t)e_x + \dot{y}(t)e_y + \dot{z}(t)e_z = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Die Beschleunigung a eines Massenpunktes ist definiert als Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit:

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{r}(t) = \ddot{x}(t)e_x + \ddot{y}(t)e_y + \ddot{z}(t)e_z = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Höhere zeitliche Ableitungen des Ortsvektors werden in der Mechanik nicht benötigt.

Ist das gewählte Bezugssystem unabhängig von der Zeit, handelt es sich um ein *Inertialsystem*. Daher sind die Ableitungen der Einheitsvektoren nach der Zeit gleich Null. Es kann nicht festgestellt werden, ob ein Bezugssystem sich in Ruhe befindet, da dazu wieder ein Bezugssystem gebraucht werden müßte. Wird eine Bewegung in einem bewegten Bezugssystem beschrieben, so ist diese Bewegung mit zu berücksichtigen.

Die Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn ist ein Spezialfall der allgemeinen Bewegung des Massenpunktes. Zur Beschreibung der Lage des Massenpunktes auf der Kreisbahn ist die

Angabe einer Winkelkoordinate $\varphi(t)$ besser geeignet als die Beschreibung durch den Ortsvektor $r(t)$. Die Winkelgeschwindigkeit ω und die Winkelbeschleunigung α sind definiert als:

$$\omega = \dot{\varphi}(t) \quad (2.4)$$

$$\alpha = \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}(t). \quad (2.5)$$

2.3 Kinetik

Während die Kinematik die Bewegung der Massenpunkte beschreibt, fragt die Kinetik nach den Ursachen der Bewegung, mit dem Ziel, aus der Kenntnis der Ursachen, diese Bewegung berechnen zu können. Grundlage ist das von Newton aufgestellte Dynamische Grundgesetz. Grundsätzlich ist die Lösung für eine Aufgabe aus dem Gebiet der Kinetik mit dem Impulssatz, dem Energie und dem d'Alembertschen Prinzip möglich, denn sie sind Umformungen des Dynamischen Grundgesetzes. Sie werden in den folgenden Abschnitten vorgestellt.

2.4 Kräfte

Um einen Körper bewegen zu können, wird eine Kraft \vec{F} aufgewendet. Die Ursache der Bewegung eines Massenpunktes ist die Einwirkung anderer Massenpunkte, wobei für die Einwirkung kennzeichnende Größe die Kraft ist. Kräfte sind Vektoren, denn die vollständige Beschreibung der Kraft erfordert auch die Angabe der Richtung, in der die Kraft wirkt. Der Körper wird immer in diese Richtung beschleunigt, in der die Kraft wirkt.

Die Kraft wird in Newton N^1 gemessen. Greifen mehrere Kräfte an einem Punkt an, so werden sie vektoriell addiert, der resultierende Vektor, *Resultierende* genannt, gibt dann Größe und Richtung der resultierenden Kraft an.

2.4.1 Newtonsche Axiome

Grundlage der Mechanik sind die Axiome von Newton, sie seien hier nochmals erwähnt.

Erstes Axiom:

Ohne äußere Beeinflussung verharrt ein Körper im Zustand der Ruhe oder gleichförmigen Bewegung.

Zweites Axiom auch dynamisches Grundgesetz genannt:

Die Änderung der Bewegungsgröße ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional. Die Änderung erfolgt in der Richtung, in der die Kraft aufgebracht wird.

Da dabei über die Proportionalitätskonstante frei verfügt werden kann, wird diese wegen der Einfachheit gleich eins gesetzt, d.h. aus der Proportion wird eine Gleichung gemacht:

$$\vec{F} \Delta t = \Delta(m\vec{v}). \quad (2.6)$$

¹Kraft: Newton, $\text{N} = \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}$

Für den Grenzübergang erhält man das Dynamische Grundgesetz:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad (2.7)$$

Die zeitliche Änderung der Bewegungsgröße $m \cdot \vec{v}$ ist gleich der äußeren Kraft, die diese Änderung verursacht.

Für den starren Körper ist m konstant und damit

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (2.8)$$

Drittes Axiom (actio = reaction):

Jede Kraft \vec{F}_{actio} besitzt eine Gegenkraft oder Reaktionskraft $\vec{F}_{reactio}$. Beide sind gleich groß und einander entgegengesetzt gerichtet.

$$\vec{F}_{actio} = -\vec{F}_{reactio}. \quad (2.9)$$

2.4.2 Drehmoment

Wirkt eine Kraft auf einen drehbaren Körper, so erzeugt sie ein Drehmoment M . Das entspricht der Wirkung eines *Kräftepaares*. Kräftepaar werden zwei gleich große Kräfte genannt, die auf parallelen Wirkungslinien liegen. Ein Kräftepaar läßt sich nicht zu einer Resultierenden zusammenfassen und hat keine resultierende Kraftwirkung. Ein Kräftepaar versucht, den Körper an dem es angreift, zu drehen. Ein Maß der Stärke dieser Drehwirkung ist das Produkt Fr , wobei r der Abstand der beiden Wirkungslinien ist. Als vektorielle Größe ist das Drehmoment das vektorielle Produkt aus \vec{r} und \vec{F} :

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}. \quad (2.10)$$

Der Vektor des Drehmomentes steht senkrecht auf der von \vec{F} und \vec{r} aufgespannten Ebene.

2.4.3 Kräftenarten

Eine Unterscheidung der auftretenden Kräfte und Momente ist deshalb erforderlich, da nicht alle Arten einen Beitrag zur Energiebilanz leisten. Dieser Umstand ist für die noch zu erläuternden Prinzipien von Bedeutung.

Für die Behandlung der Bewegungsgleichung eines Massenpunktsystems ist es hilfreich zwischen inneren und äußeren Kräften, eingepprägten und Zwangskräften zu unterscheiden. Die Klassifizierung nach inneren Kräften \vec{F}_I und äußeren Kräften \vec{F}_A hängt im wesentlichen von der frei wählbaren Systemgrenze ab. Die Systemgrenze ist dabei als Trennung zwischen dem mechanischen System und der Umgebung zu verstehen. Durch Veränderung der Systemgrenze kann jede innere Kraft zur äußeren Kraft und auch umgekehrt jede äußere Kraft zur inneren Kraft werden. Die Umgebung und das mechanische System stehen in Wechselwirkung zueinander. Diese Wechselwirkung wird durch ein Kräftepaar beschrieben. Die Kräfte sind dabei gleich groß und entgegengesetzt (Reaktionsprinzip). Handelt es sich um äußere Kräfte, so liegt eine dieser beiden Kräfte außerhalb und eine innerhalb der Systemgrenze.

Innere Kräfte werden Kräfte genannt, die die Massenpunkte eines Systems aufeinander ausüben, z.B. die Bindungskräfte der Massenpunkte. Die in der Mechanik üblicherweise behandelten inneren Kräfte sind Zweikörperkräfte von Massenpunkten die innerhalb der Systemgrenze liegen, d.h., die vom Massenpunkt j auf den Massenpunkt i wirkende Kraft \vec{F}_{ji} hängt nur von der Lage und Geschwindigkeit der beiden Massenpunkte ab, sie ist unabhängig von den anderen Massenpunkten des Systems. Auch hier gilt das 3.Newtonschen Axiom (actio=reaction) aus dem die wichtige Eigenschaft der inneren Kräfte folgt, daß die vom Massenpunkt j auf den Massenpunkt i ausgeübte Kraft \vec{F}_{ji} entgegengesetzt gleich der vom Massenpunkt i auf den Massenpunkt j ausgeübten ist:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}. \quad (2.11)$$

Äußere Kräfte \vec{F}_A sind alle Kräfte die keine innere Kräfte sind. Äußere Kräfte sind Kräfte, die ihre Ursache außerhalb der Systemgrenze haben. Z.B. die auf die Massenpunkte wirkende Schwerkraft ist eine äußere Kraft.

Eingeprägte Kraft ist die Summe der inneren und äußeren Kräfte, sie ist die auf einen Massenpunkt i des Massenpunktsystem mit n Massenpunkten wirkende Kraft, d.h.:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i = \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{Ai}, \quad (2.12)$$

der Massepunkt i übt keine Kraft auf sich selbst aus, daher gibt es keinen Betrag für $i = j$.

Die eingepprägten Kräfte, die sich auf die Energiebilanz des Systems auswirken, lassen sich durch physikalische Gesetzmäßigkeiten erfassen. Ob sich eine Kraft auf die Energiebilanz auswirkt oder nicht, hängt davon ab, ob sich die Kraftangriffspunkte entlang der Wirkungslinie verschieben können. Ist dies der Fall, so handelt es sich um eingepprägte Kräfte. Verursacht die Gewichtskraft einer Masse auf einer schiefen Ebene einen Höheunterschied der Masse, so handelt es sich um eine eingepprägte Kraft. Falls keine Verschiebung möglich ist handelt es sich um eine Reaktionskraft.

Zwangkräfte oder Reaktionskräfte, sind Kräfte die durch Bewegungseinschränkungen hervorgerufen werden. Charakteristisch für die Reaktions- oder Zwangskraft ist, daß sie keinen unmittelbaren Einfluß auf die Bewegung des Systems haben. Sie stellen nur die Reaktionen auf die Bewegungseinschränkungen durch Bindungen oder geometrische Einschränkungen dar, z.B., Kräfte an Führungen, die Normalkraft zwischen Masse und schiefer Ebene, usw. Zwangskräfte liefern im Gegensatz zu den eingepprägten Kräften keinen Beitrag zur Energiebilanz.

Zur Ermittlung der eingepprägten Kräfte werden Kraftgesetze verwendet. Die Größe und Richtung der Kräfte lassen sich durch physikalische Gesetzmäßigkeiten ausdrücken. Oft sind diese Abhängigkeiten bekannt, so z.B. bei Gewichtskraft, Federkraft oder Dämpfungskräften. Die Wirkung der Gravitation wird auf einen Körper durch Gewichtskraft \vec{F}_G erfaßt, die im Massenmittelpunkt des Körpers angreift und nach Newton durch das Kraftgesetz $F_G = m\vec{g}$ beschrieben wird. In der Technik werden üblicherweise Federn mit linearer Kennlinie verwendet, d.h. der Zusammenhang zwischen Federkraft und dem Federweg s ist proportional. Die Proportionalitätskonstante wird dabei als *Federsteifigkeit* oder *Federkonstante*² c bezeichnet. Das Kraft-Weg-Gesetz für Federn lautet damit $F = cs$.

²Die Federkonstante hat die Dimension $\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}}$

2.4.4 Trägheitskräfte

Die Eigenschaft aller Körper, sich Änderungen ihres jeweiligen Bewegungszustandes zu widersetzen, wird Beharrungsvermögen, Trägheit oder träge Masse m genannt. Die Kraft, die der beschleunigenden Kraft \vec{F} wegen des Beharrungsvermögens entgegen wirkt, wird Trägheitskraft \vec{F}_T genannt. Sie hat den gleichen Betrag wie \vec{F} und ist dieser entgegengerichtet:

$$\vec{F}_T = -m\vec{a}. \quad (2.13)$$

In bezug auf ein mit einem beschleunigten Körper mitbewegtes Bezugssystem befindet sich dieser in Ruhe. Die vektorielle Summe aller N am Körper angreifenden Kräfte, einschließlich der an ihm angreifenden Trägheitskraft, ist stets gleich Null:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \vec{F}_T = 0 \quad (2.14)$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i - m\vec{a} = 0 \quad (2.15)$$

2.4.5 Schwerpunktsatz

Mehrere Massenpunkte stehen in vielen Fällen in so enger Wechselwirkung, daß es unzumutbar ist, die Bewegung jedes einzelnen Massenpunktes für sich zu betrachten. Beispiele dafür sind Atome in einem Molekül, Moleküle in einem Kristallgitter usw.. In diesen Fällen werden die Massenpunkte zu einem Massenpunktsystem mit den n Massenpunkten zusammengefaßt. Für jeden einzelnen Massenpunkt gilt natürlich die Newtonsche Bewegungsgleichung (2.4.1). Der Schwerpunktsatz gibt eine Rechtfertigung der Einführung des Massenpunkt Begriffes. In dem ein kompliziertes System durch seinen Schwerpunkt ersetzt werden kann, kann es wie ein Massenpunkt behandelt werden.

Wenn alle n Bewegungsgleichungen (2.12), addiert werden, heben sich wegen (2.11) die inneren Kräfte heraus:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_{ji} + \sum_{i=1}^n F_{Ai} = \sum_{i=1}^n F_{Ai}. \quad (2.16)$$

Sei

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \quad (2.17)$$

die Gesamtmasse des Systems und

$$\vec{r}_s = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (2.18)$$

der Ortsvektor des Massenmittelpunktes oder *Schwerpunkt*. Der *Schwerpunktsatz* kann dann geschrieben als:

$$m \frac{d^2 \vec{r}_s}{dt^2} = m \vec{a}_s = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{Ai}. \quad (2.19)$$

Der Schwerpunkt eines Massenpunktsystems bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm vereinigt ist und alle äußeren Kräfte auf ihn wirken. Innere Kräfte haben keinen Einfluß auf seine Bewegung.

2.4.6 Impulssatz

Der Impuls p ist definiert als Produkt von Masse m und Geschwindigkeit v , er wird in $\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$ gemessen:

$$p = mv \quad (2.20)$$

Das 2.Newtonsche Gesetz (2.4.1) ist demnach gleichwertig mit dem Impulssatz:

$$F = \frac{d}{dt}p \quad (2.21)$$

Das Zeitintegral über die Krafteinwirkung ergibt die Impulsänderung

$$\int_{t_0}^{t_1} F dt = (mv)_1 - (m\vec{v})_0 = p_1 - p_0 \quad (2.22)$$

Der Impulssatz (2.21) eignet sich für die Lösung von Problemen, bei denen nach einer Geschwindigkeit bei bekannter Krafteinwirkung über die Zeit gefragt wird. Wenn keine Kraft wirkt, gilt der *Impulserhaltungssatz*:

$$\frac{d}{dt}p = 0, \quad p = \text{const.} \quad (2.23)$$

Aus ihm folgt, daß sich der Massenpunkt mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Geraden bewegt.

2.5 Statik

Die Statik ist die Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte. Mit Hilfe des Prinzips von d'Alembert, welches in Kapitel III beschrieben wird, wird ein Problem der Kinetik auf ein Problem der Statik reduziert. In diesem Zusammenhang wird die Gleichgewichtsbedingung der Statik benötigt:

Die wirkenden Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn die Resultierende dieser Kräfte und die Summe der Drehmomente gleich Null ist.

$$\sum \vec{F} = 0; \quad \sum \vec{M} = 0. \quad (2.24)$$

2.6 Energie und Arbeit

Wenn eine Kraft einen Körper einen auf einem bestimmten Weg verschiebt, so verrichtet sie am Körper Arbeit. Energie ist die Fähigkeit eines Körpers, Arbeit zu verrichten. Arbeit und Energie sind äquivalente Größen und werden mit den gleichen physikalischen Einheiten, d.h. in Joule (J) = Nm, gemessen³. Die für diese Arbeit relevanten Energieformen sind die mechanischen Energien, d.h. die kinetische Energie, die potentielle Energie und die Rotationsenergie.

³Arbeit: Joule, J = Newtonmeter = $\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$

2.6.1 Arbeit

Mechanische Arbeit ist das Produkt aus dem Weg s und der tangential zur Bahnrichtung wirkenden Kraft. Ist die Kraft während des Vorgangs konstant und ist die Kraft- und Wegrichtung gleich, gilt:

$$W = Fs. \quad (2.25)$$

Ist die Kraft nicht konstant, sondern eine Funktion des Weges $F(s)$, und bilden Kraft und Weg den Winkel α , sei $F_s = F \cos \alpha$ dann gilt:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds. \quad (2.26)$$

Da in die Arbeit die Zeit, in der sie verrichtet wird, nicht eingeht, wird als Maß für die pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit die Leistung P definiert:

$$P = \frac{dW}{dt} = F \frac{dr}{dt} = F \dot{r}. \quad (2.27)$$

2.6.2 Energiesatz

Wird die Kraft über den Weg integriert, sei die Masse m konstant, ergibt sich der Energiesatz:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{d\vec{r}}{dt} d\vec{v} = m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{v} d\vec{v} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = T_2 - T_1. \quad (2.28)$$

Der Energiesatz stellt eine weitere Umwandlungsform des Dynamischen Grundgesetzes dar. Die Arbeit der Kraft ist gleich der Differenz der kinetischen Energie des Massenpunktes m zwischen Endpunkt und Anfangspunkt der Bewegung.

2.6.3 Kinetische Energie

Die *kinetische Energie*

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.29)$$

ist das Arbeitsvermögen des Massenpunktes m infolge seiner Bewegung mit der Geschwindigkeit v .

2.6.4 Das Potential

Die Arbeit der Gewichtskraft einer Masse m , m sei konstant, ist vom Weg s unabhängig. In das Ergebnis geht nur die Höhendifferenz $h = h_1 - h_2$ des Anfangs- und Endpunktes der Bewegung ein, denn da die Kraft konstant ist, gilt:

$$W = mgh = mg(h_1 - h_2) \quad (2.30)$$

Das Arbeitsvermögen der Gewichtskraft einer Masse m , das Potential der Gewichtskraft, hängt ausschließlich von der Höhe ab, in der sich die Masse über einer willkürlich zu definierenden Bezugsebene befindet. Die Arbeit, die sie bei einer Bewegung bis zum Erreichen dieser Bezugsebene leistet ist nach (2.30) vom Weg s unabhängig.

Eine Masse m in der Höhe h über einer Bezugsebene hat die *potentielle Energie*:

$$U = mgh. \quad (2.31)$$

Allgemein besitzt eine Kraft potentielle Energie, wenn eine Funktion $U(r)$ existiert mit:

$$\frac{d}{dt}U(r) = -F\dot{r}. \quad (2.32)$$

Die Funktion $U(r)$ wird *Potential* genannt. Kräfte heißen *konservative Kräfte*, wenn sie, wie die Gewichtskraft ein Potential besitzen, so daß die von ihnen geleistete Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt der Bewegung abhängt und nicht von dem Weg, der dabei zurückgelegt wird. Neben der Gewichtskraft besitzt auch die Federkraft ein Potential. Eine Feder mit der Federkonstante c hat die potentielle Energie

$$U = \frac{c}{2}s_0^2 \quad (2.33)$$

Dabei ist s_0 der Federweg, die Verlängerung oder Verkürzung der Länge der entspannten Feder. Unter der Federkonstante c versteht man das Verhältnis der dehnenden Kraft zur Dehnung.

2.6.5 Massenträgheitsmoment

Dreht sich ein Massenpunkt der Masse m im Abstand r um eine Rotationsachse, so gilt für den Weg $s = \phi r$ und für die Geschwindigkeit $v = \dot{s} = \dot{\phi} r = \omega r$, wobei $\omega = \dot{\phi}$ die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Für die kinetische Energie gilt dann:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega r)^2. \quad (2.34)$$

Für ein System von n Massenpunkten der Massen m_i gilt:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i(\omega r_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i. \quad (2.35)$$

Bei dem Vergleich einer gradlinig bewegten Masse entspricht die Masse bei der Rotation die Summe:

$$J = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i = mr^2. \quad (2.36)$$

Sie wird *Massenträgheitsmoment* genannt.

2.6.6 Rotationsenergie

Ein rotierender Körper besitzt auf Grund der Geschwindigkeit seiner einzelnen Massenelemente Bewegungsenergie, aus den Gleichungen (2.34) und (2.35) folgt:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2, \quad (2.37)$$

die in diesem Fall als *Rotationsenergie* bezeichnet wird. Wobei T_{rot} die Energie des rotierenden Körpers, J das Massenträgheitsmoment und ω die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet.

2.6.7 Drehimpuls

Der Drehimpuls D eines Körpers ist definiert als das Produkt aus seinem Trägheitsmoment J und seiner Winkelgeschwindigkeit ω :

$$D = J\omega. \quad (2.38)$$

Ein Körper, auf den kein Drehmoment einwirkt, behält seine Winkelgeschwindigkeit bei, d.h. als Gesetz von der Erhaltung des Drehimpulses formuliert:

Der Drehimpuls eines abgeschlossenen Systems, d.h. ohne Einwirkung äußerer Drehmomente, ist konstant.

2.6.8 Translation und Rotation

Wenn jede beliebige Gerade, die zwei Punkte eines starren Körpers verbindet, während der Bewegung ihre Richtung beibehält, so führt der Körper eine reine *Translation* aus. Bei einer solchen translatorischen Bewegung, bewegen sich alle Punkte des Körpers auf kongruenten Bahnen, so daß die Beschreibung der Bewegung eines Punktes genügt.

Wenn ein Punkt des starren Körpers festgehalten wird, kann der Körper nur noch eine reine *Rotation* um diesen Punkt ausführen.

Meist ist es zweckmäßig, die allgemeine Bewegung als eine Überlagerung einer Translation mit einer Rotation zu beschreiben.

Die ebene Bewegung des starren Körpers wird beschrieben durch die Translation eines beliebigen Bezugspunktes O , der eine Rotation um den Bezugspunkt überlagert ist. Die Translation des Bezugspunktes kann auf einer beliebigen Bahnkurve erfolgen. Die Rotation um den Bezugspunkt erfolgt mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den Bezugspunkt, wobei jeder Punkt des starren Körpers eine Kreisbewegung um den Bezugspunkt ausführt. Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes P setzt sich zusammen aus einem translatorischen Anteil v_{trans} und dem rotatorischen Anteil v_{rot}

v_{trans} die Bahngeschwindigkeit des Bezugspunktes O
 v_{rot} die Bahngeschwindigkeit der Kreisbewegung von P auf einem Kreis mit dem Radius r um den Bezugspunkt O .

Die beiden Anteile v_{trans} und v_{rot} sind vektoriell zur Geschwindigkeit v des Punktes P zu überlagern.

Die kinetische Energie setzt sich aus einem translatorischen und rotatorischen Anteil zusammen. Als Bezugspunkt A sind der Schwerpunkt oder ein momentan in Ruhe befindlicher Punkt des Körpers zugelassen. Für die kinetische Energie bei der Bewegung eines starren Körpers gilt:

$$T = T_{trans} + T_{rot} = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}J_A\omega^2 \quad (2.39)$$

Die Analogie zwischen Drehbewegung eines Körpers um eine feste Achse und der eindimensionalen Bewegung eines Massenpunktes wird in der folgenden Tabelle noch einmal verdeutlicht:

Ort	x	Drehwinkel	φ
Masse	m	Trägheitsmoment	J
Geschwindigkeit	$v = \dot{x}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \dot{\varphi}$
Impuls	$m\dot{x}$	Drehimpuls	$J\omega$
Kraft	F	Drehmoment	M
kinetische Energie	$\frac{1}{2}m\dot{x}^2$		$\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$
Bewegungsgleichung	$m\ddot{x} = F$		$J\ddot{\varphi} = M$

2.6.9 Energieerhaltungssatz

In vielen Fällen ist die auf einen Massenpunkt wirkende Kraft eine Summe von Kräften verschiedener physikalischer Ursachen, von denen die einen ein Potential besitzen, die anderen nicht. Die Kraft wird demgemäß eingeteilt in konservative und *dissipative* Kräfte:

$$F = F_{kon} + F_{dis}. \quad (2.40)$$

Die Summe aus potentieller Energie U und kinetischer Energie T ist die Energie E des Massenpunktes. Sind alle Kräfte konservativ gilt der Energieerhaltungssatz:

$$T + U = E \quad (2.41)$$

die Summe aus kinetischer Energie und potentieller Energie ist konstant und gleich der Gesamtenergie E

Energie ist hier immer mechanische Energie, potentielle, kinetische und Rotationsenergie. Dissipative Kräfte führen mechanische Energie in andere Energieformen über. Im folgenden werden nur Kräfte betrachtet, die ein Potential besitzen.

2.7 Zwangsbedingungen

In den meisten mechanischen Systemen treten Nebenbedingungen auf, die dem Bewegungsablauf des Systems geometrische Einschränkungen auferlegen. Durch die Nebenbedingungen oder auch als Zwangsbedingungen bezeichnet, wird die Zahl der Freiheitsgrade zwar geringer, aber in den Bewegungsgleichungen sind nun auch die Zwangskräfte einzusetzen, die für die Einhaltung der Nebenbedingungen sorgen.

2.7.1 Generalisierte Koordinaten

Alle Größen, die die Konfiguration einer mechanischen Anordnung kennzeichnen können, werden generalisierte Koordinaten q genannt. Ein Massenpunktsystem von n Massenpunkten, das r Nebenbedingungen genügen muß, hat genau $f = 3n - r$ Freiheitsgrade. Statt der $3n$ kartesischen Koordinaten werden f generalisierte Koordinaten verwendet, die durch keine Nebenbedingungen eingeschränkt werden. Die meisten Probleme der Mechanik lassen sich in anderen als den kartesischen Koordinaten wesentlich leichter lösen.

Generalisierte Koordinaten können unterschiedliche Bedeutung haben, wie Abstände, Winkel usw., es sind dem jeweiligen Problem optimal angepaßte Koordinaten. Die $3n$ kartesischen Koordinaten x_j , die den Nebenbedingungen genügen müssen, lassen sich als Funktionen der generalisierten Koordinaten darstellen:

$$x_j = x_j(q_1, \dots, q_f, t) \quad j = 1, \dots, 3n \quad (2.42)$$

vektoriell

$$\vec{r}_l = r_l(q_1, \dots, q_f, t) \quad l = 1, \dots, 3n \quad (2.43)$$

Die Zeitabhängigkeit ermöglicht den Übergang auf bewegte Koordinaten.

2.7.2 Holonome Nebenbedingungen

Holonome Nebenbedingungen werden durch Gleichungen beschrieben, die die Systemkoordinaten und eventuell auch die Zeit miteinander verknüpfen, sie lauten für ein System mit n Massenpunkten, deren Position durch $3n$ generalisierte unabhängige Koordinaten q_j festgelegt ist:

$$f_i(q_1, \dots, q_{3n}, t) = 0 \quad i = 1, \dots, k \quad (2.44)$$

Die k unabhängigen holonome Nebenbedingungen (2.44) reduzieren die Zahl der Freiheitsgrade eines n -Teilchensystems auf $3n - k$.

Allerdings kommen in der Natur auch Nebenbedingungen, die nicht in Form der Gleichungen (2.44) geschrieben werden können. Z.B. wird ein punktförmiges Teilchen welches die Oberfläche einer Kugel mit Radius r herunterrutscht abheben, wenn die Geschwindigkeit hoch genug, die Zwangsbedingung lautet:

$$r^2 - R^2 \geq 0. \quad (2.45)$$

Ungleichungen sind nur ein Spezialfall nicht-holonome Nebenbedingungen, es gibt z.B. auch nicht-holonome Einschränkungen, die sich nicht in holonome Form bringen lassen, da sie sich nur in nicht integrierbarer differentieller Form schreiben lassen. Im folgenden werden nur holonome Nebenbedingungen angenommen. Eine weitere Unterscheidung der holonomen Bedingungen erfolgt durch *rheonome* bzw. *skleronome* Bedingungen.

Rheonom (fließend) werden Zwangsbedingungen genannt, wenn sie die Zeit explizit enthalten.

Skleronom (starr) nennt man Zwangsbedingungen, wenn sie Zeitunabhängig sind.

2.7.3 Bewegungsgleichung mit Nebenbedingungen

Bei der Existenz von Zwangsbedingungen können die Bewegungsgleichungen nicht

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i$$

sondern müssen

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i \tag{2.46}$$

lauten. Dabei sind m_i und \vec{a}_i Massen und Beschleunigungsvektor des i -ten Teilchens. \vec{F}_i ist die eingeprägte Kraft. \vec{Z}_i ist die Zwangskraft auf das i -te Teilchen, die die geometrische Einschränkung der Bewegung bewirkt, z.B. die Spannung des Fadens, der das Pendel eines Fadenpendels am Ausbrechen hindert. Die Größe einer Zwangskraft ist i.a. nicht bekannt.

Da Zwangskräfte in den Newtonschen Gleichungen aufgeführt werden müssen, ist die rechnerische Behandlung in der Praxis oft schwierig. Die im nächsten Abschnitt behandelten Prinzipien der Mechanik, sind für Systeme, die Nebenbedingungen unterworfen sind, besser angepaßt, da die Zwangskräfte nicht mitgeführt werden.

Kapitel 3

Physikalische Prinzipien

Die Bewegung eines mechanischen Systems beruht auf Kräften und Momenten, die an seinen einzelnen Teilkörpern wirken. Zur Ermittlung der Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten.

Zum einen die synthetische Methode, die auf den Newtonschen Gleichungen aufbaut, und zum anderen die analytische Methoden.

Die synthetische Methode hat den Nachteil, daß die Zwangskräfte und -momente in Erscheinung treten. Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen mit verwickelten Nebenbedingungen ist im Rahmen der Newtonmechanik nur sehr umständlich zu bearbeiten.

Mit Hilfe der analytischen Methode nach Lagrange werden die Bewegungsgleichungen über kinetische und potentielle Energien des Systems aufgestellt. Dies hat den Vorteil, daß die Zwangskräfte von vornherein nicht berücksichtigt werden müssen. Die Bewegungsgleichungen können somit ohne die Anwendung weiterer Prinzipien aufgestellt werden.

Die hier vorgestellten Prinzipien sind das Prinzip der virtuellen Verschiebung, das Prinzip von d'Alembert und der Lagrangeformalismus II.Art mit dem Ziel, das Problem der Berechnung von komplizierten Nebenbedingungen, zu umgehen. So soll als Abschluß dieses Kapitels noch das Prinzip von Hamilton erwähnt werden, da es vor dem Prinzip von Lagrange das historisch ältere ist.

Doch am Anfang steht das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, die im Zusammenhang der anderen Prinzipien Vereinfachungen bei der Herleitung der Bewegungsgleichung mit sich bringt. Aus den virtuellen Verschiebungen wird die virtuelle Arbeit definiert, welche eine Aussage über den augenblicklichen Bewegungszustand des mechanischen Systems gibt, den man sich als momentan eingefroren vorstellen kann. Die wichtigen Aussagen von d'Alembert über die virtuelle Arbeit und der Zwangskräfte führen zur Ableitung der Lagrangeschen Gleichungen.

Das d'Alembert-Prinzip ist ein Axiom über die Natur der Zwangskräfte und ermöglicht den besten Einstieg in die Lagrangesche Mechanik. Die d'Alembertgleichung enthält keine Zwangskräfte und wird zur Bestimmung von Kräften und Gleichgewichten benutzt.

Der Lagrangeformalismus ist Problemen mit Nebenbedingungen in idealer Weise angepaßt und liefert im allgemeinen den schnellsten und einfachsten Weg zur Aufstellung von Bewegungsgleichungen.

Das Prinzip von Hamilton sagt aus, daß die Differenz aus kinetischer Energie und potentieller Energie integriert über einen Bewegungsablauf ein Extremum annehmen muß. Im Gegensatz zum Prinzip der virtuellen Arbeit, das eine Aussage über einen momentanen Bewegungszustand erlaubt, gilt das Prinzip von Hamilton für einen gesamten Bewegungsablauf.

3.1 Virtuelle Verschiebung

In (2.26) wurde die Arbeit als Produkt aus einer Verschiebung $d\vec{r}$ und der in Richtung der Verschiebung wirkenden Kraftkomponente definiert. Um den Arbeitsbegriff auch auf Probleme der Statik anwenden zu können, bei denen keine Verschiebungen auftreten, und um die Zwangskräfte eines bewegten Systems, die von den Nebenbedingungen hervorgerufen werden, zu ermitteln, werden *virtuelle Verschiebungen* $\delta\vec{r}$ mit folgenden Eigenschaften definiert:

- Virtuelle Verschiebungen bzw. Verdrehungen sind infinitesimal klein und können wie Differentiale werden.
- Virtuelle Verschiebungen bzw. Verdrehungen müssen mit den geometrischen Bindungen des Systems, den Nebenbedingungen, verträglich sein.
- Sie sind zeitlos ($\delta t = 0$), d.h. unendlich schnell, nur gedacht (*virtuell*), sie stimmen nicht mit der Lageveränderung während der wirklichen Bewegung überein.

Bei skleronomen Nebenbedingungen sind wirkliche und virtuelle Verschiebungen gleich. Bei rheonomen Zwangsbedingungen besteht ein Unterschied zwischen wirklichen und virtuellen Verschiebungen.

Die *virtuelle Arbeit einer Kraft* ist das skalare Produkt aus der Kraft und der virtuellen Verschiebung des Kraftangriffspunktes:

$$\delta W = \vec{F} \delta \vec{r}, \quad (3.1)$$

analog dazu wird die *virtuelle Arbeit eines Moments* definiert:

$$\delta W = \vec{M} \delta \vec{\varphi}. \quad (3.2)$$

Zu beachten ist, daß die virtuellen Verschiebungen mit den geometrischen Bindungen verträglich sein muß. Wenn eine virtuelle Verschiebung eines Systems möglich sein soll, muß es mindestens einen Freiheitsgrad haben.

Für das Aufschreiben der virtuellen Verschiebungen $\delta\vec{r}$ eines Kraftangriffspunktes bietet sich folgender Weg an.

Die Komponenten des Ortsvektors \vec{r} , der die Lage des Kraftangriffspunktes in einem festen Koordinatensystem beschreibt, werden in Abhängigkeit von den f unabhängigen generalisierten Koordinaten q_i formuliert.

Da eine virtuelle Verschiebung wie ein Differential behandelt werden darf, ergibt sich $\delta\vec{r}$ dann formal nach:

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, \dots, q_f) \quad \Rightarrow \quad \delta\vec{r} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \delta q_i \quad (3.3)$$

Die generalisierten Koordinaten q_i müssen voneinander unabhängig sein, dementsprechend sind auch beliebige voneinander unabhängige virtuelle Verschiebungen δq_i möglich.

Diese Formulierung mit Hilfe der generalisierten Koordinaten wird zur Herleitung der Lagrange-Gleichungen von Bedeutung sein.

3.2 d'Alembert

Es gibt Probleme der Mechanik, die allein mit Hilfe der Newtonschen Gleichungen nicht behandelt und gelöst werden können. Es wird ein Verfahren gesucht, um für einen Massenpunkt, dessen Bewegungsfreiheit gewisse Bindungen und Einschränkungen unterworfen ist, die Bewegungsgleichungen aufzustellen. Ein solches Verfahren wird das d'Alembertsche Prinzip bereitstellen.

3.2.1 Bewegungsgleichung von d'Alembert

Die eingeprägte Kraft \vec{F}_e eines in seiner Bewegungsfreiheit eingeschränkten Massenpunkt ist unabhängig von denen, die durch die Nebenbedingungen hervorgerufen werden. Da der Massenpunkt dieser Kraft nicht frei folgen kann, stimmen $m\vec{a}$ und \vec{F}_e nicht überein. Ihre Differenz entspricht einer durch die Nebenbedingungen verursachten Zwangskraft \vec{F}_z , sie wird mit Hilfe von Gleichung (2.46) definiert durch die Gleichung:

$$\vec{F}_z = m\vec{a} - \vec{F}_e. \quad (3.4)$$

Bei geführten Bewegungen gibt es Anteile der eingepprägten Kräfte, die sich nicht in Beschleunigung umsetzen, sondern von den Reaktionskräften bzw. den Widerstandskräften im Gleichgewicht gehalten werden.

In die Formeln des dynamischen Grundgesetzes bei konstanter Masse m :

$$\vec{F} = m \frac{d(\vec{v})}{dt} = m\vec{a}, \quad (3.5)$$

müssen bei geführten Massen und auftretenden Bewegungswiderständen alle eingepprägten Kräfte, die Zwangskräfte und die Bewegungswiderstände eingesetzt werden:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_z + \vec{F}_w = m\vec{a}. \quad (3.6)$$

Diese Gleichung liefert in der Form:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_z + \vec{F}_w - m\vec{a} = 0 \quad (3.7)$$

eine elegante Strategie für das Aufschreiben der Bewegungs-Differentialgleichung:

- alle Kräfte freilegen. Ein wichtiges Werkzeug bei der Aufstellen von Bewegungsgleichungen in der Mechanik ist das Schnittprinzip. Die auf einen Massenpunkt wirkenden Kräfte werden dadurch freigelegt, daß seine Bindungen freigeschnitten werden,
- alle eingepprägten Kräfte antragen.,
- alle Zwangskräfte (Reaktionskräfte) infolge äußerer Bindungen und Führungen antragen, die durch das Freischneiden sichtbar werden,
- antragen der Bewegungswiderstände , z.B. Gleitreibung, Rollreibung, Luftwiderstand. Bewegungswiderstände sind immer entgegen der tatsächlichen Bewegungsrichtung anzutragen.
- die Massenkräfte $-m\vec{a}$ (d'Alembertsche Kräfte) antragen.

Danach können die Gleichgewichtsbedingungen, wie in der Statik, aufgeschrieben werden.

3.2.2 Prinzip der virtuellen Arbeit

Zwangskräfte leisten unter bestimmten Umständen keine Arbeit. Zum Beispiel wird bei einer auf einer Tischplatte liegenden Kugel die Zwangskraft die Wirkung der Schwerkraft kompensieren, aber keine Beschleunigung und Bewegung der Kugel in der Ebene verursachen. Die Zwangskraft steht senkrecht auf der Bahnkurve. Da virtuelle Verschiebungen mit den geometrischen Bindungen des Systems verträglich sein müssen, gibt es nur eine virtuelle Verschiebung auf der horizontalen Ebene. Die Zwangskraft steht senkrecht zur virtuellen Verschiebung. Die Natur der Zwangskräfte ist derart, daß sie keine virtuelle Zwangsarbeit verrichten.

Diese Art von Überlegungen führen zum d'Alembertschen Prinzip auch Prinzip der virtuellen Arbeit genannt:

Bei virtuellen Verschiebungen leistet die Zwangskraft keine Arbeit

$$\delta W = \vec{F}_z \delta \vec{r} = (m\vec{a} - F_e) \delta \vec{r} = 0. \quad (3.8)$$

Dies ist eine Annahme, die zwar plausibel gemacht, aber nicht aus den drei Newtonschen Axiomen abgeleitet werden kann. Gleichung (3.8) ist ein eigenständiges Axiom der Mechanik. Es beruht auf der Erfahrung, daß Zwangsflächen, Achsen, Stangen, Fäden usw. ein System nicht beschleunigen oder aufschaukeln, d.h. keine Zwangsarbeit leisten.

Die virtuelle Arbeit läßt sich mit (3.3) schließlich in folgender Form aufschreiben:

$$\delta W = \vec{F} \delta \vec{r} = \vec{F} \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0. \quad (3.9)$$

Dieses Prinzip kann nun verwendet werden, um die Zwangskraft zu bestimmen.

Beispielsweise ergibt die virtuelle Arbeit der Kugel auf der x,y -Ebene der Tischplatte:

$$\delta W = (m\ddot{x} - F_{(x)})\delta x + (m\ddot{y} - F_{(y)})\delta y + (m\ddot{z} - F_{(z)})\delta z = 0. \quad (3.10)$$

Die Nebenbedingung für die Bewegung der Kugel ist:

$$z = 0, \quad (3.11)$$

daraus folgt

$$\ddot{z} = 0 \quad \text{und} \quad \delta z = 0. \quad (3.12)$$

Da in diesem Fall die einzige wirkende Kraft die Schwerkraft ist, gilt für die Komponenten

$$F_{(x)} = 0, \quad F_{(y)} = 0, \quad F_{(z)} = -mg, \quad (3.13)$$

und Gleichung (3.10) vereinfacht sich zu

$$m\ddot{x}\delta x + m\ddot{y}\delta y = 0. \quad (3.14)$$

Da die Komponenten der virtuellen Verschiebung frei wählbar sind, verschwinden die Komponenten $m\ddot{x}$ und $m\ddot{y}$.

Werden diese Beziehungen in die Definitionsgleichung (3.4) der Zwangskraft eingesetzt, ergibt sich für diese Kraft:

$$\vec{F}_z = -\vec{F}_e = (0, 0, mg). \quad (3.15)$$

Die Zwangskraft kompensiert genau die auf der Kugel wirkenden Schwerkraft, so daß diese kräftefrei auf der Tischebene liegt.

3.2.3 d'Alembert und Newton

Das d'Alembertsche Prinzip ermöglicht die Behandlung von Problemen, für die die Newtonschen Axiome nicht ausreichen. Wenn jedoch keine Nebenkräfte enthalten sind, führen das d'Alembertsche Prinzip und die Newtonschen Axiome auf dieselben Bewegungsgleichungen.

Da die virtuellen Verschiebungen beim Fehlen jeder Bedingungsgleichung beliebig, von Null verschieden, gewählt werden können, führt die Gleichung (3.8) zu :

$$m\vec{a} - F_e = 0. \quad (3.16)$$

Das Newtonsche Bewegungsgesetz ist somit als Spezialfall in Gleichung (3.8) enthalten.

3.3 Lagrange

Gesucht sind Bewegungsgleichungen, die nach Art und Anzahl genau den Freiheitsgraden des Systems entsprechen und in denen Zwangskräfte und Nebenbedingungen nicht mehr vorkommen. Das Prinzip von Lagrange, die Lagrangegleichungen II.Art, werden genau dieser Forderung genügen und bilden den Ausgangspunkt der formalen Weiterentwicklung.

Beim Aufbringen einer virtuellen Verschiebung $\delta\vec{r}$, die mit den Zwangsführungen verträglich sein muß, leisten die, senkrecht zu den Führungen gerichteten, Zwangskräfte \vec{F}_z keine virtuelle Arbeit. Ausgehend von diesem Prinzip von d'Alembert werden nun die Lagrangeschen Gleichungen entwickelt.

3.3.1 Lagrangesche Bewegungsgleichung

In einem System von n Massenpunkten m_i mit f Freiheitsgraden, dessen Lage eindeutig durch f generalisierte Koordinaten q_j beschrieben werden kann, gilt das Prinzip von d'Alembert:

$$\begin{aligned}\delta W &= \sum_{i=1}^n (m_i \vec{a}_i - \vec{F}_{i,e}) \delta \vec{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,e} \delta \vec{r}_i \\ &= \delta W_m - \delta W_e = 0.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Der erste Term in (3.17), die virtuelle Arbeit der Massenkräfte, läßt sich mit (3.3) folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}\delta W_m &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \delta \vec{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_f} \delta q_f \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(m_i \vec{a}_i \sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Für die kinetische Energie eines Massenpunktsystem gilt:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i^2,\tag{3.19}$$

Die kinetische Energie hängt folgendermaßen mit δW_m zusammen:

Für die Geschwindigkeitsvektoren der Massenpunkte gilt mit (3.3):

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad (3.20)$$

daraus folgt für die partielle Ableitung von \vec{v}_i nach \dot{q}_j :

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (3.21)$$

Für die partielle Ableitung der kinetischen Energie nach q_j bzw. \dot{q}_j gilt:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (3.23)$$

Die weitere Ableitung des Ausdrucks (3.23) nach der Zeit ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (3.24)$$

d.h es gilt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (3.25)$$

Damit ergibt sich für die virtuelle Arbeit der Massenkräfte mit Hilfe der kinetischen Energie folgende Umformung:

$$\delta W_m = \sum_{j=1}^f \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (3.26)$$

Der zweite Term in (3.17), die virtuelle Arbeit der eingepprägten Kräfte, läßt sich mit (3.3) folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}\delta W_e &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,e} \delta \vec{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,e} \left(\frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_1} \delta q_1 + \cdots + \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_j} \delta q_j + \cdots + \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_f} \delta q_f \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,e} \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_1} \delta q_1 + \cdots + \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,e} \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_j} \delta q_j + \cdots + \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,e} \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_f} \delta q_f \\ &= Q_1 \delta q_1 + \cdots + Q_j \delta q_j + \cdots + Q_f \delta q_f\end{aligned}\tag{3.27}$$

$$= \sum_{j=1}^f Q_j \delta q_j,\tag{3.28}$$

wobei

$$Q_j := \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,e} \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_j}\tag{3.29}$$

die sog. *generalisierten Kräfte* sind.

Die generalisierte Kraft Q_j ist der über die Zwangsbedingung wirkende Anteil der angreifenden Kraft.

Die virtuelle Arbeit δW_e kann also aus dem Produkt der eingepprägten Kräften mit den virtuellen Verschiebungen der Kraftangriffspunkte $\delta \vec{r}_i$ oder dem Produkt aus den generalisierten Kräften Q_j und den virtuellen Verschiebungen δq_j berechnet werden.

Wenn die eingepprägten Kräfte ausschließlich Potentialkräfte sind, wie es in der Mechanik meistens der Fall ist, kann die virtuelle Arbeit δW_e entsprechend (2.32) mit $-\delta U$ modifiziert werden:

$$\delta W_e = -\delta U = \sum_{j=1}^f -\frac{\partial U}{\partial q_j} \delta q_j\tag{3.30}$$

Für die generalisierten Kräfte gilt in diesem Fall:

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,e} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}\tag{3.31}$$

3.3.2 Lagrangesche Gleichung 2.Art

Mit den Umformungen der virtuellen Arbeit der Massenkkräfte δW_m und eingepprägten Kräfte δW_e ergibt sich nun für die gesamte Arbeit:

$$\begin{aligned}
\delta W &= \delta W_m - \delta W_e \\
&= \sum_{j=1}^f \left(\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) - Q_j \right) \delta q_j \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Da die f virtuellen Verschiebungen δq_j unabhängig voneinander sind, kann diese Gleichung nur erfüllt sein, wenn die Klammer für jeden einzelnen Summanden verschwindet.

Das führt zu einer Vorstufe der *Lagrangeschen Gleichungen II.Art*:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1, \dots, f. \tag{3.33}$$

Die f Gleichungen gelten für ein System mit f Freiheitsgrade, dessen Lage durch genau f generalisierte Koordinaten beschrieben wird. T ist die kinetische Energie des Gesamtsystems, die generalisierten Kräfte Q_j können nach (3.29) aus den eingepägten Kräften und den Ortsvektoren ihrer Angriffspunkte oder bei Potentialkräften aus der potentiellen Energie nach (3.31) berechnet werden.

Die eigentlichen Lagrangeschen Gleichungen II.Art werden erlangt, wenn nur Kräfte mit einem Potential zugelassen sind. Denn wenn ausschließlich Potentialkräfte wirken, kann Gleichung (3.31) in die Gleichungen (3.33) eingesetzt werden:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0 \tag{3.34}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_j} = 0. \tag{3.35}$$

Da die potentielle Energie nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_j abhängt und bei der partiellen Ableitung keinen Anteil liefert, kann sie auch in den ersten Term hineingezogen werden.

Die *Lagrangeschen Funktion* L ist die Differenz zwischen kinetischer Energie T und Potentieller Energie U . Mit der Definition der Lagrangeschen Funktion:

$$L := T - U \quad (3.36)$$

erhält man die

Lagrangesche Gleichungen II.Art:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \quad j = 1, \dots, f. \quad (3.37)$$

3.3.3 Lagrange mit Reibung

In der Form (3.37) können die Lagrangegleichungen keine Reibung beschreiben, da Reibungskräfte nicht aus einem Potential abgeleitet werden können. Die Lagrangegleichungen werden in diesem Fall, um die generalisierten Kräfte Q_j erweitert, die kein Potential besitzen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - Q_j = 0. \quad j = 1, \dots, f. \quad (3.38)$$

Zur Aufstellung der Gleichungen müssen die kartesischen Reibungskräfte R_j mit den Gleichungen (3.29) in generalisierte Kräfte Q_j umgerechnet werden.

3.3.4 Hamilton

Weitere Einsichten in die Prinzipien der Physik liefert das Prinzip von Hamilton. Vorweg sei erwähnt, daß dieses Prinzip auch bekannt ist, als *Prinzip der kleinsten Wirkung*.

In Anlehnung der Naturvorgänge bedeutet das, daß diese Vorgänge auf möglichst einfache Gesetze zurückzuführen sind. Neben der Einfachheit gilt das ökonomische Prinzip: Die Natur sucht unter allen denkbaren Bewegungen diejenige aus, die ihr Ziel mit der kleinsten Wirkung¹ erreicht.

Wie bei einem einzelnen Massenpunkt, so spricht man auch bei einem Massenpunktsystem von einer Bahnkurve und meint damit, die durch die Funktionen $q_k(t)$ beschriebene Kurve in dem abstrakten f -dimensionalen Konfigurationsraum der generalisierten Koordinaten q_k .

Das Hamilton-Prinzip sagt nun, daß die wirkliche vom System durchlaufene Bahnkurve $q_k(t)$ gegenüber anderen denkbaren Bahnkurven $q'_k(t)$ dadurch gekennzeichnet ist, daß für sie das Integral

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt \quad (3.39)$$

einen Extremwert, meistens ein Minimum, annimmt, also

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \quad (3.40)$$

gilt. W ist die Wirkungsfunktion.

Die Aufgabenstellung in der Variationsrechnung lautet: Suche die Kurve q_k , die das Integral δW

¹Die Wirkung ist eine Größe der Dimension: Energie x Zeit

zu einem Extremum macht. Wie beim d'Alembertschen Prinzip die virtuellen Verschiebungen exakt definiert wurden, so muss hier genau festgelegt werden, welche Vergleichsbahnen $q'_k(t)$ zugelassen werden:

- Alle Bahnen gehen durch den gleichen Anfangs- und Endpunkt,

$$\begin{aligned} q'_k(t_1) &= q_k(t_1), & \delta q_k(t_1) &= 0 \\ q'_k(t_2) &= q_k(t_2), & \delta q_k(t_2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

- Die Vergleichsbahnen müssen zur realen Bahn benachbart sein, generalisierte Koordinaten bzw. generalisierte Geschwindigkeiten dürfen sich nur wenig unterscheiden,

$$\begin{aligned} q'_k(t) &= q_k(t) + \delta q_k(t), \\ \dot{q}'_k(t) &= \dot{q}_k(t) + \frac{d}{dt}\delta q_k(t) = \dot{q}_k(t) + \delta \dot{q}_k(t) \end{aligned} \quad (3.42)$$

- Der Vergleich wird bei fester Zeit durchgeführt

$$\delta t = 0. \quad (3.43)$$

Mit Hilfe der Variationsrechnung und dem Hamilton-Prinzip folgt, daß die realen, in der Natur verwirklichten Bahnen den Lagrange Gleichungen II.Art

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \quad (3.44)$$

genügen müssen. In der Variationsrechnung werden diese Gleichungen *Euler-Lagrangeschen Gleichungen* des Variationsproblems genannt.

3.4 Zusammenfassung

Mit Hilfe des Lagrangeformalismus erhält man nun eine Gebrauchsanweisung zur Aufstellung und Berechnung der Bewegungsgleichung:

- Bestimme die kinetische Energie T und die potentielle Energie U des Gesamtsystems in Abhängigkeit von geeigneten unabhängigen generalisierten Koordinaten.
- Bestimme die Lagrangefunktion $L = T - U$
- Stelle die Lagrangegleichungen (3.37) auf. Diese Gleichungen sind ein System von f Differentialgleichungen 2.Ordnung.
- Berechne die f Funktionen q_j

Die Lagrangegleichungen II.Art (3.37) sind zur d'Alembertgleichung (3.8) äquivalent. Die entscheidenden Schritte zur Herleitung der Gleichungen (3.37) bildete die Darstellung der virtuellen Verschiebung $\delta \mathbf{r}$ mit Hilfe der unabhängigen generalisierten Koordinaten q_j , und die Herleitung der generalisierten Kräfte Q_j aus Potentialen.

Weiterhin sind Lagrangegleichungen aus dem Hamilton-Prinzip herleitbar. Hier sollte nur die Erwähnung dieses Prinzips genügen. Doch für die theoretische Physik ist das Wirkungsprinzip die

kürzeste Zusammenfassung von Naturgesetzen und deswegen besonders geeignet, Aussagen allgemeiner Art, z.B. Erhaltungssätze, abzuleiten.

In den Lagrangegleichungen sind Nebenbedingungen und Zwangskräfte eliminiert. Die Lagrangegleichungen gelten nur für holonome Zwangsbedingungen und für Kräfte, die aus einem Potential abgeleitet werden können. Dies bedeutet insbesondere, daß keine Reibung auftreten darf.

In Kapitel V werden die Lagrangegleichungen verwendet um die Bewegungsgleichungen einiger physikalischer Systeme aufzustellen.

Kapitel 4

Numerische Integration

Das Aufstellen einer geschlossenen Lösung der Bewegungs-Differentialgleichung ist nicht immer möglich. Glücklicherweise treten die nichtlinearen Probleme im allgemeinen als Anfangswertaufgaben auf, d.h. an einem bestimmten Punkt, in der Regel am Anfang der Bewegung, sind alle interessierenden Größen bekannt. Für diese Probleme stehen numerische Methoden zur Verfügung, welche hinreichend genaue Näherungswerte der gesuchten Lösungsfunktionen liefern. Einige dieser Verfahren sollen hier vorgestellt werden.

4.1 Anfangswertproblem

Die Idee der numerischen Integration und einiger Integrationsmethoden sollen am einfachsten Anfangswertproblem dargestellt werden. Hierbei geht es um das *Anfangswertproblem (AWP) 1. Ordnung*.

Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$y'(x) = f(x, y_x) \quad (4.1)$$

Gesucht ist eine Lösung $y = y(x)$ auf einem Intervall $I = [x_0, x_n]$, die eine bestimmte Anfangswertbedingung erfüllt:

$$y(x_0) = y_0 \quad (4.2)$$

4.1.1 Integral des AWP

Beide Seiten der Differentialgleichung (4.1) werden über das Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ integriert:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx \quad (4.3)$$

Das Integrationsintervall der Differentialgleichung wird in ein Gitter

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \quad (4.4)$$

zerlegt mit den lokalen Schrittweiten $h_i := x_{i+1} - x_i$. Nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung gilt:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx \quad (4.5)$$

Gesucht sind nun an den diskreten Gitterpunkten x_i Näherungswerte y_i für die exakten Lösungen $y(x_i)$. Da auf der rechten Seite der Gleichung (4.5) die im Integranden enthaltene Funktion $y(x)$ nicht bekannt ist, muß das Integral näherungsweise gelöst werden.

Allgemein können Systeme von Differentialgleichungen betrachtet werden. Dann sind in (4.1) y, y' und f als Vektoren zu betrachten:

$$y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix},$$

deren n Komponenten Funktionen von $x \in \mathbb{R}$ bzw. x und y_1, \dots, y_n sind, und für y_0 aus (4.2) gilt $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

4.1.2 Ordnungsreduktion

Bei mechanischen Problemen kommen Differentialgleichungen oder Differentialgleichungssysteme vor, welche die zeitliche Änderung einer oder mehrerer Zustandsgrößen beschreiben. Aufgrund des Newtons Bewegungsgesetz (2.4.1) sind diese Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Für eine numerische Integration sollten Differentialgleichungen der Ordnung n :

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y', \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (4.6)$$

in n Differentialgleichungen erster Ordnung umgeformt werden, die nach den Ableitungen aufgelöst sind. Die Umformung geschieht durch Einführung neuer zusätzlicher Variablen, meist sind das all die Zustandsgrößen, die das physikalische Problem sinnvoll beschreiben. Bei Bewegungen sind das Auslenkung und zusätzlich die Geschwindigkeiten.

Durch Einführung der Hilfsfunktion :

$$z_i(x) = y^{(i-1)}(x), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.7)$$

wird (4.6) auf ein äquivalentes System von Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ \vdots &= \vdots \\ z_{n-1}' &= z_n \\ z_n' &= f(x, z_2, \dots, z_n) \end{aligned} \quad (4.8)$$

zurückgeführt. Damit lassen sich alle Verfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen 1. Ordnung auch Probleme für Differentialgleichungen n -ter Ordnung anwenden.

Im folgenden werden die allgemeinen numerischen Integrationsmethoden beschrieben, mit denen aus der Näherung y_k für $y(x_k)$ die folgende Näherung y_{k+1} für $y(x_{k+1})$ gewonnen werden kann. Grundsätzlich lassen sich die Integrationsmethoden auf alle mechanischen Probleme anwenden. Ausgegangen wird von einer Klassifikation der numerischen Methoden [WS89].

4.2 Klassifikation der Methoden

Die numerischen Verfahren zur Lösung des Anfangswertproblems unterscheiden sich im wesentlichen nur dadurch, welche Methode zur näherungsweise Berechnung des Integrals in (4.5) verwendet wird. Die numerischen Methoden lassen sich folgendermaßen klassifizieren.

1. Klassifikation nach der Integrationsart
 - (a) explizite Verfahren
 - (b) Predictor-Correcter-Verfahren
 - (c) implizite Verfahren
2. Klassifikation nach Anzahl der Stützstellen
 - (a) Einschrittverfahren (*one-step methods*)
 - (b) Mehrschrittverfahren (*multi-step methods*)
 - (c) Extrapolationsverfahren (*extrapolation algorithms*)

Explizit: numerische Integrationsmethoden werden *explizit* genannt, wenn zur Berechnung der Steigung f_i im Punkt x_i nur bereits bekannte f_j für $j = 0, 1, \dots, i-1$ benutzt werden.

Predictor-Correcter-Verfahren: sind Verfahren, die einen Näherungswert $y_{k+1}^{(0)}$ zunächst im Predictor-Schritt nach einem Einschrittverfahren oder Mehrschrittverfahren bestimmen. Der Predictor $y_{k+1}^{(0)}$ wird dann mit einem *Korrektor*-Verfahren zu $y_{k+1}^{(1)}, y_{k+1}^{(2)}$, usw. verbessert.

Implizit: implizite Integrationsmethoden, verlangen die Lösung einer impliziten Gleichung nach dem unbekanntem Näherungswert y_{k+1} . Implizite Verfahren benutzen bei der Ausführung des Integrationssschrittes Daten, die noch nicht berechenbar sind, die Ableitung y'_{i+1} . Die bekannteste Integrationsformel dieses Aufbaus ist die *Trapezregel*:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{y'_{k+1} + y'_k}{2} h \quad (4.9)$$

Einschrittverfahren: diese Verfahren verwenden zur Berechnung eines weiteren Näherungswertes y_{k+1} nur *einen* vorangehenden Wert y_k . Das Polygonzugverfahren ist eine einfache Methode dieser Art. Eine ganze Gruppe von Methoden bilden die Runge-Kutta-Verfahren und deren Variationen.

Mehrschrittverfahren: diese Verfahren verwenden $s + 1, s > 1$, vorangehende Werte $y_{k-s}, y_{k-s+1}, \dots, y_{k-1}, y_k$ zur Berechnung eines Näherungswertes y_{k+1} . Adams-Bashfort und Adams-Moulton sind bekannte Verfahren dieser Gruppe von Integrationsformeln.

Extrapolation: Oft ist ein gesuchter Grenzwert nicht direkt berechenbar, sondern es können nur Werte in der Nähe des Grenzwertes bestimmt werden. Diese Werte werden durch Extrapolation verbessert. Bekannte Verfahren sind die Richardson-Extrapolation und das Verfahren von Romberg.

Im folgenden werden die Einschrittverfahren, speziell das Runge-Kutta-Verfahren, vorgestellt, welchen dann auch im Implementationsteil angewendet wird.

4.2.1 Taylor

Die Taylorsche Formel bildet die Grundlage für die Approximation der gesuchten Lösungsfunktion:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für $x_0 \in I$ und $x \in I$

$$y(x) = \sum_{i=0}^n \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + R_{n+1}(x), \quad \text{mit} \quad (4.10)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad \text{als Restglied.} \quad (4.11)$$

Wird in der Taylor-Formel (4.10) das Restglied (4.11) vernachlässigt, so erhält man mit Schrittweite $h := x_{k+1} - x_k$ den Näherungswert y_{k+1} allgemein nach der Rechenvorschrift

$$y_{k+1} = \sum_{i=0}^n \frac{y_k^{(i)}}{i!} h^i \quad (4.12)$$

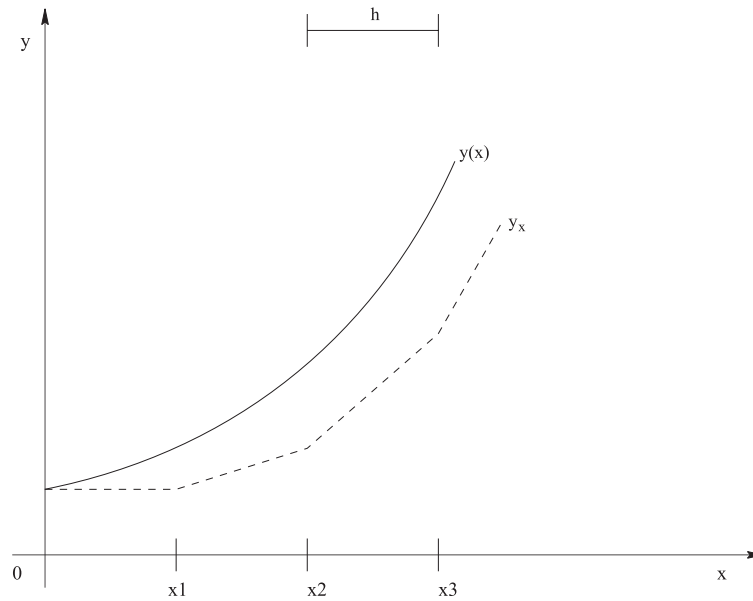


Abbildung 4.1: Polygonzugverfahren (Euler)

Ist h hinreichend klein und können die $y^{(i)}$ berechnet werden, so kann $y(x)$ approximiert werden. Sollen möglichst viele Terme zugelassen werden, so muß die gegebene Differentialgleichung differenziert werden können.

Die Ableitungen der Differentialgleichung ergeben sich nach folgenden Gleichungen, die später auch zur Bestimmung der Runge-Kutta-Verfahren benötigt werden.

Nach der Kettenregel gilt¹:

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= f(x, y(x)) \\
 y''(x) &= f_x + f_y f \\
 y'''(x) &= f_{xx} + f_{xy} f + (f_x + f_y f) f_y + (f_{yx} + f_{yy} f) f
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

usw.

4.2.2 Euler

Da die Differentialgleichung (4.1) im Punkt (x_0, y_0) mit dem Wert $y' = f(x, y)$ die Steigung der Tangente der gesuchten Lösungsfunktion festlegt, besteht die einfachste numerische Methode zur Behandlung des Anfangswertproblems darin, die Lösungskurve $y(x)$ im Sinn einer Linearisierung

¹ $f_x = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y(x))$

durch die Tangente zu approximieren (siehe Abb.4.1). Mit der Schrittweite h und den zugehörigen Gitterpunkten

$$x_k = x_0 + kh, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4.14)$$

erhält man sukzessive die Näherung y_k für die exakten Lösungswerte $y(x_k)$ auf Grund der allgemeinen Rechenvorschrift:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4.15)$$

Diese Integrationsmethode, *Euler-Methode* genannt, benutzt in den einzelnen Näherungspunkten (x_k, y_k) die Steigung des durch die Differentialgleichung definierten Richtungsfeldes dazu, den nächstfolgenden Näherungswert y_{k+1} zu bestimmen. Wegen der anschaulich geometrischen Konstruktion der Näherung wird das Verfahren auch als *Polygonzugmethode* bezeichnet. Sie ist offensichtlich sehr grob und kann nur für kleine Schrittweiten h gute Näherungswerte liefern. Sie stellt den einfachsten Repräsentanten einer *expliziten Einschrittmethode* dar, die zur Berechnung der Näherung y_{k+1} an der Stelle $x_{k+1} = x_k + h$ einzig den bekannten Näherungswert y_k an der Stützstelle x_k verwendet.

Das *verbesserte Polygonzugverfahren*:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_{k+\frac{1}{2}}\right) \\ y_{k+1} &= y_k + hk_2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

erfordert die Auswertung der Funktion $f(x, y)$ an zwei verschiedenen Stellen in einem einzelnen Schritt, es benutzt zur Berechnung von y_{k+1} das Richtungsfeld im Hilfspunkt $(x_k + \frac{1}{2}h, y_{k+\frac{1}{2}})$ und erzielt damit eine wesentlich bessere Anpassung der Lösung an das Richtungsfeld der Differentialgleichung.

4.3 Fehlerordnung

Zur Beurteilung der Genauigkeit der Einschrittverfahren zur Lösung eines AWP (4.1) läßt sich für alle Verfahren folgende allgemeine Form angeben :

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(x_k, y_k, h), \quad (4.17)$$

aus welcher bei gegebener Information (x_k, y_k) und Schrittweite h der neue Näherungswert y_{k+1} an der Stelle $x_{k+1} = x_k + h$ zu berechnen ist. Φ wird als *Verfahrensfunktion* bezeichnet. Jedes Einschrittverfahren ist durch die zugehörige Verfahrensfunktion eindeutig festgelegt.

In jedem Schritt von x_k nach x_{k+1} bei der Approximierung von y_{k+1} mit Hilfe der numerischen Methoden werden drei Sorten von Fehler gemacht. Es wird unterschieden in Rundungsfehler, lokaler und globaler Verfahrensfehler.

Der Einfluß der *Rundungsfehler* wächst mit Anzahl der Rechenoperationen, also mit kleiner werdender Schrittweite h , während der Verfahrensfehler mit h abnimmt.

Als *lokalen Abbruchfehler oder Diskretisierungsfehler* an der Stelle x_{k+1} wird die Differenz

$$\delta_{k+1} = y(x_{k+1}) - y(x_k) - h\Phi(x_k, y(x_k), h) \quad (4.18)$$

bezeichnet, er stellt die Abweichung dar, um welchen die exakte Lösungsfunktion $y(x)$ die Integrationsvorschrift in einem Schritt nicht erfüllt. $O(h^{q_\delta})$ bezeichnet die Ordnung des lokalen Verfahrensfehlers. Der Diskretisierungsfehler rührt vom Abbrechen der Taylor-Reihenentwicklung her, er wird mit Hilfe des Taylor-Restgliedes (4.11) abgeschätzt. Wird nach dem n .Glied abgebrochen, ist der Abbruchfehler von der Ordnung $O(h^{n+1})$

Als *akkumulierter oder globaler Fehler* an dem Gitterpunkt x_{k+1} wird die Differenz

$$\epsilon_{k+1} = y(x_{k+1}) - y_{k+1} \quad (4.19)$$

bezeichnet, der unter Berücksichtigung aller vorhergehenden Fehler bei der Integration der Differentialgleichung (4.1) über $[x_0, x_{k+1}]$ entsteht. $O(h^{q_\epsilon})$ ist die Ordnung des globalen Verfahrensfehlers. Die globale Fehlerordnung q_ϵ eines Verfahrens wird sicher erreicht, wenn die Lösung y des AWP's $(q_\epsilon + 1)$ -mal stetig differenzierbar ist. Mit der lokalen Fehlerordnung q_δ ergibt sich für die globale Fehlerordnung q_ϵ grundsätzlich

$$q_\epsilon = q_\delta - 1. \quad (4.20)$$

Das Euler-Verfahren besitzt z.B. die Fehlerordnung 1, das verbesserte Polygonzug-Verfahren besitzt die Fehlerordnung 2 und das im nächsten Abschnitt behandelte Runge-Kutta Verfahren besitzt die Ordnung 4, obwohl der Rechenaufwand nicht wesentlich höher ist.

4.4 Runge Kutta

Die wichtigste Klasse der Einschrittverfahren sind die Runge-Kutta-Verfahren. Die Idee der Entwicklung einer m -stufigen Runge-Kutta-Methode liegt darin, den Wert des Integrals aus Gleichung (4.5) durch eine Formel zu approximieren, welche auf m -Stützstellen

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$$

im Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ mit zugehörigen Integrationsgewichten beruht

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m.$$

Die Lage der Integrationsstützstellen ξ_j sowie die Gewichte γ_i sollen beliebig sein. Sie werden später so bestimmt werden, daß das resultierende Verfahren eine möglichst hohe Fehlerordnung

besitzt.

Ein explizites m -stufiges Runge-Kutta-Verfahren hat die allgemeine Form:

$$y_{i+1} = y_i + h(\gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2 \dots + \gamma_m k_m)$$

mit

$$\begin{aligned} k_1(x_i, y_i, h) &= f(x_i, y_i) \\ k_2(x_i, y_i, h) &= f(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21} k_1) \\ k_3(x_i, y_i, h) &= f(x_i + \alpha_3 h, y_i + h(\beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2)) \\ &\vdots \\ k_m(x_i, y_i, h) &= f(x_i + \alpha_m h, y_i + h(\beta_{m1} k_1 + \beta_{m2} k_2 + \dots + \beta_{m, m-1} k_{m-1})). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Die Koeffizienten werden bei gegebenem m so bestimmt, daß der lokale Diskretisierungsfehler δ_{k+1} eine bestimmte Ordnung annimmt. Dazu werden die k_i in Φ der Verfahrensfunktion sukzessiv in der Taylorreihe an der Stelle x_k entwickelt, um sie anschliessend in δ_{k+1} einzusetzen. Dadurch erhält man für α_i, β_i und γ_i ein System von nichtlinearen Bedingungsgleichungen, welches für jede Lösung ein spezielles Runge-Kutta-Verfahren liefert.

Im folgenden Abschnitt wird das Prinzip der Herleitung von m -stufigen Runge-Kutta-Verfahren am Beispiel eines allgemeinen zweistufigen Verfahrens dargelegt. Die Entwicklung eines Verfahrens höherer Fehlerordnung erfolgt analog.

4.4.1 Runge-Kutta 2.Ordnung

Ein zwei-stufiges Verfahren wird durch folgende algorithmische Form beschrieben:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + \alpha_2 h, y_k + \beta_2 h k_1) \\ y_{k+1} &= y_k + h(\gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2) = y_k + h\Phi(x_k, y_k, h). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Der lokale Diskretisierungsfehler des zwei-stufigen-Runge-Kutta-Verfahrens ist gegeben durch:

$$\delta_{k+1} = y(x_{k+1}) - y(x_k) - (\gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2)h. \quad (4.23)$$

Für die Taylorentwicklung von δ_{k+1} nach h in $h = 0$

$$\delta_{k+1} = d_0 + d_1 h + d_2 h^2 + \dots + d_q h^q + \dots \quad (4.24)$$

werden die Parameter so bestimmt, daß möglichst viele Koeffizienten Null werden, so daß gilt:

$$\delta_{k+1} = d_q h^q + d_{q+1} h^{q+1} + \dots, \quad d_q \neq 0. \quad (4.25)$$

Das bedeutet, daß der lokale Diskretisierungsfehler proportional zu h^q ist.

Eine spezielle Forderung ist die Gleichung:

$$\alpha_2 = \beta_2, \quad (4.26)$$

da dann der Punkt $(x_k + \alpha_2 h, y_k + h\beta_2 k_1)$, der k_2 bestimmt, auf der durch (x_k, y_k) gehenden Geraden mit der Steigung k_1 liegt.

Die Entwicklung der k_i und y_{x+1} in einer Taylorreihe erfolgt mit (4.13) folgendermaßen:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y(x_k)) = f & (4.27) \\ k_2 &= f(x_k + \alpha_2 h, y(x_k)) + \alpha_2 h f(x_k, y(x_k)) \\ &= f + \alpha_2 h f_x + \alpha_2 h f f_y + \frac{1}{2} \alpha_2^2 h^2 f_{xx} \\ &\quad + \alpha_2^2 h^2 f f_{xy} + \frac{1}{2} \alpha_2^2 h^2 f^2 f_{yy} + O(h^3) \end{aligned}$$

mit

$$F = f_x + f f_y \quad (4.28)$$

$$G = f_{xx} + 2f f_{xy} + f^2 f_{yy} \quad (4.29)$$

gilt

$$k_2 = f + \alpha_2 h F + \frac{1}{2} \alpha_2^2 h^2 G + O(h^3). \quad (4.30)$$

Für y_{x+1} gilt in der Taylorreihenentwicklung:

$$y_{x+1} = y_k + f h + \frac{1}{2} F h^2 + \frac{1}{6} G h^3 + O(h^4). \quad (4.31)$$

Diese Entwicklungen in δ_{k+1} eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} \delta_{k+1} &= (1 - \gamma_1 - \gamma_2) f h + \left(\frac{1}{2} - \gamma_2\right) F h^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \alpha_2^2\right) G + F f_y h^3 + O(h^4). \end{aligned}$$

Da gefordert wird, daß möglichst viele Koeffizienten Null werden, gilt:

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 &= 1 \\ \gamma_2 + \alpha_2 &= \frac{1}{2} \\ \gamma_2 + \beta_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Da in der Taylorreihe für δ_{k+1} im Koeffizienten von h^3 ein Term vorhanden ist, der von den Parametern unabhängig ist, erhält man ein Verfahren der Ordnung 2.

Mögliche Lösungen des Gleichungssystems (4.32) sind mit

$$\begin{aligned} \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} (= \beta_2) \quad &\text{das verbesserte Polygonzugverfahren} \\ \text{und mit} \\ \gamma_1 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = 1 (= \beta_2) \quad &\text{das Verfahren von Heun.} \end{aligned}$$

4.4.2 Runge-Kutta 4.Ordnung

Der Ansatz für ein explizites vierstufiges Runge-Kutta-Verfahren enthält in der verallgemeinerten Form (4.21) dreizehn Parameter

$$\alpha_2, \beta_{21}, \alpha_3, \beta_{31}, \beta_{32}, \alpha_4, \beta_{41}, \beta_{42}, \beta_{43}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4,$$

zwischen denen wiederum die Relationen

$$\alpha_k = \sum_{j=1}^{k-1} \beta_{kj}, (k = 2, 3, 4) \quad (4.33)$$

gefordert werden. Wie im Fall der zweistufigen Runge-Kutta-Verfahren wird der lokale Diskretisierungsfehler in einer Taylorreihe nach den Potenzen der Schrittweite h entwickelt. Folgende wichtige Variante ist die historisch älteste Runge-Kutta-Methode, sie wird als *klassische Runge-Kutta-Methode vierter Ordnung bezeichnet* :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ k_4 &= f(x_k + h, y_k + hk_3) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Das Verfahren (4.34) hat die Eigenschaft, daß die sukzessive Bestimmung der Steigungen k_i , nur den unmittelbar vorangehenden Wert k_{i-1} benötigt.

Nachteile des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens: Es werden je Runge-Kutta-Schritt vier Funktionsauswertungen von f durchgeführt, bei höherstufigen sind es entsprechend mehr.

Vorteile des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens: Die Gegenüberstellung von Rechenaufwand und Genauigkeit im Vergleich zu dem Euler-Verfahren, dem verbesserten Polygonzug-Verfahren oder dem Verfahren von Heun zeigt, daß das klassische Runge-Kutta-Verfahren diesen Verfahren unbedingt vorzuziehen ist.

Für die expliziten m -stufigen Runge-Kutta-Verfahren mit $m \leq 4$ ist die lokale Fehlerordnung $q_\delta = m + 1$, die globale Fehlerordnung $q_\epsilon = m$ möglich. Für $m > 4$ ergibt sich $q_\epsilon < m$. Zusammengefaßt gilt für die globale Fehlerordnung m -stufiger expliziter Runge-Kutta-Verfahren:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q_ϵ	1	2	3	4	4	5	6	6	7

Weitere wichtige Einschrittverfahren sind das *RK-Fehlberg Verfahren 4.Ordnung* :

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_k, y_k) \\
 k_2 &= f\left(x_k + \frac{1}{4}h, y_k + \frac{1}{4}hk_1\right) \\
 k_3 &= f\left(x_k + \frac{3}{8}h, y_k + \frac{3}{32}hk_1 + \frac{9}{32}hk_2\right) \\
 k_4 &= f\left(x_k + \frac{12}{13}h, y_k + \frac{1932}{2197}hk_1 - \frac{7200}{2197}hk_2 + \frac{7296}{2197}hk_3\right) \\
 k_5 &= f\left(x_k + h, y_k + \frac{439}{216}hk_1 - 8hk_2 + \frac{3680}{513}hk_3 - \frac{845}{4104}hk_4\right) \\
 y_{k+1} &= y_k + h\left(\frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5\right)
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

und das *Kutta-Nyström-Verfahren 5.Ordnung*:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_k, y_k) \\
 k_2 &= f\left(x_k + \frac{1}{3}h, y_k + \frac{1}{4}hk_1\right) \\
 k_3 &= f\left(x_k + \frac{2}{5}h, y_k + \frac{4}{25}hk_1 + \frac{6}{25}hk_2\right) \\
 k_4 &= f\left(x_k + h, y_k + \frac{1}{4}hk_1 - \frac{12}{4}hk_2 + \frac{15}{4}hk_3\right) \\
 k_5 &= f\left(x_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{6}{81}hk_1 - \frac{90}{81}hk_2 - \frac{50}{81}hk_3 + \frac{8}{81}hk_4\right) \\
 k_6 &= f\left(x_k + \frac{4}{5}h, y_k + \frac{6}{75}hk_1 - \frac{36}{75}hk_2 + \frac{10}{75}hk_3 + \frac{8}{75}hk_4\right) \\
 y_{k+1} &= y_k + h\left(\frac{23}{192}k_1 + \frac{125}{192}k_3 - \frac{81}{192}k_5 + \frac{125}{192}k_6\right)
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

4.4.3 Schrittweitensteuerung

Es ist im allgemeinen nicht sinnvoll, mit konstanter Schrittweite, also äquidistantem Gitter, zu rechnen. Es empfiehlt sich, die lokalen Schrittweiten an das lokale Verhalten der Lösung anzupassen. In Bereichen glatteren Verlaufs der Lösung sollten verhältnismäßig große Schrittweiten gewählt werden, in Bereichen starker Änderung der Lösung verhältnismäßig kleine Schrittweiten. Eine Steuerung der Schrittweitenwahl ist über eine Fehlerschätzung möglich.

Es besteht darin, den lokalen Fehler einer verwendeten Methode A, mit Hilfe einer Methode B höherer Fehlerordnung zu schätzen. Ausgehend von einem Näherungswert y_k an dem Punkt x_k und einer Schrittweite h , werden die Näherungswerte der beiden Methoden an dem Punkt $x = x_k + h$ berechnet, und je nach Ausfall der Fehlerschätzung:

$$\delta_{k+1}^{(A)} - \delta_{k+1}^{(B)} \tag{4.37}$$

wird entschieden ob die Schrittweite zu verkleinern ist, um eine Genauigkeitsforderung zu erfüllen, oder ob sie für den folgenden Integrationsschritt vergrößert werden kann. Um mit möglichst geringem Aufwand zu arbeiten, muß das Verfahren höherer Fehlerordnung die gleichen

k_i -Werte verwenden, wie das Verfahren mit der niedrigeren Fehlerordnung. Die verbesserte Polygonzugmethode (4.16) und das *Runge-Kutta-Verfahren dritter Ordnung*:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 &= f(x_k + h, y_k - k_1 + 2hk_3) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{6}h(k_1 + 4k_2 + k_3) \end{aligned} \quad (4.38)$$

erfüllen z.B. diese Forderung.

4.4.4 Mehrschrittverfahren

Mit Einschrittverfahren wird der Näherungswert y_{k+1} an der Stelle $x_{k+1} = x_k + h$ allein auf Grund des Näherungspunktes (x_k, y_k) bestimmt. Im Gegensatz dazu verwenden die *Mehrschrittverfahren* zur Berechnung von y_{k+1} die vorhandene Information auch an vorhergehenden Stützstellen $x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-m}$. Die Wertepaare $(x_i, f(x_i, y_i))$ für $i = -m, \dots, 0$ bilden das Anlaufstück zur weiteren Berechnung. Die Werte von y für das Anlaufstück sind entweder vorgegeben oder sie werden mit Hilfe eines Einschrittverfahrens näherungsweise berechnet. Wiederum bildet die zur Differentialgleichung äquivalente Integralgleichung (4.5) den Ausgangspunkt. Die Funktion f wird nun ersetzt durch eine interpolatorische Quadraturformel bzw. durch das Interpolationpolynom Φ_m vom Höchstgrad m an den Interpolationsstellen (x_j, f_j) für $j = j-m, \dots, k$, und Φ_m wird über das Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ integriert.

Z.B. liefert für die Herleitung der Methoden von *Adams-Bashfort (AB)* die Integration über $[x_k, x_{k+1}]$:

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \Phi_m(x) dx \quad (4.39)$$

$$\delta_{k+1}^{(AB)} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} R_{m+1}(x) dx, \quad (4.40)$$

wobei $\delta_{k+1}^{(AB)}$ der lokale Verfahrensfehler ist, der bei der Integration unter Annahme entsteht, daß die Startwerte exakt sind.

Die historisch älteste Variante der Adams-Bashfort-Methode bezieht sich zur Berechnung des Näherungswertes y_{k+1} auf die Information an den vier aufeinanderfolgenden Stützstellen $x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k$, die linear kombiniert werden. Daher wird diese Methode von Adams-Bashfort als explizites, lineares 4-Schrittverfahren bezeichnet. Eine offensichtliche Eigenschaft der Methode besteht darin, daß pro Integrationsschritt nur eine einzige Funktionsauswertung von $f(x_k, y_k)$ erforderlich ist, da die vorhergehenden Werte f_{k-1}, f_{k-2} und f_{k-3} bereits berechnet worden sind.

Im folgenden sind die Adams-Bashfort-Verfahren für $m = 3, 4, 5, 6$ und die Ordnung q_δ der

zugehörigen lokalen Verfahrensfehler $\delta_{k+1}^{(AB)} = O(h^q)$ angeben:

$$m = 3, \quad q_\delta = 5: \quad y_{k+1} = y_k + \frac{1}{24}h(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}) \quad (4.41)$$

$$m = 4, \quad q_\delta = 6: \quad y_{k+1} = y_k + \frac{1}{720}h(1901f_k - 2774f_{k-1} + 2616f_{k-2} - 1274f_{k-3} + 251f_{k-4}) \quad (4.42)$$

$$m = 5, \quad q_\delta = 7: \quad y_{k+1} = y_k + \frac{1}{1440}h(4277f_k - 7923f_{k-1} + 9982f_{k-2} - 7298f_{k-3} + 2877f_{k-4}f_{k-}) \quad (4.43)$$

$$m = 6, \quad q_\delta = 8: \quad y_{k+1} = y_k + \frac{1}{60480}h(198721f_k - 447288f_{k-1} + 705549f_{k-2} - 688256f_{k-3} + 407139f_{k-4} - 134472f_{k-5} + 19087f_{k-6}) \quad (4.44)$$

Für die globale Fehlerordnung $O(h_\epsilon^q)$ gilt $q_\epsilon = q_\delta - 1$.

Nachteil des Adams-Bashfort-Verfahrens: Es ist jeweils ein Anlaufstück mit $m + 1$ Wertepaaren erforderlich, das mit Hilfe eines anderen Verfahrens bestimmt werden muß. Dieses Verfahren sollte aber von der gleichen lokalen Fehlerordnung sein, was z.B. durch entsprechende Runge-Kutta-Verfahren gewährleistet wäre. Dieser Sachverhalt würde dafür sprechen, das entsprechende Runge-Kutta-Verfahren für das ganze Intervall anzuwenden.

Vorteil des Adams-Bashfort-Verfahrens: Da bei einem Adams-Bashfort-Schritt jedoch nur ein neuer Funktionswert f_k zu berechnen ist, gegenüber m -Funktionswerten bei einem Runge-Kutta Schritt der Ordnung m , ist die Adams-Bashfort im Vergleich zur Runge-Kutta-Methode beträchtlich schneller.

4.4.5 Stabilität

Ein Algorithmus heißt *stabil*, wenn ein für einen Rechenschritt zugelassener Fehler in den Folgeschritten abnimmt oder von der gleichen Größenordnung bleibt. Er heißt *instabil*, wenn für eine beliebig große Anzahl von Schritten die Näherungen von den gesuchten Werten unbegrenzt abwandern, so daß die Lösung total verfälscht wird. Die Ursachen für eine Instabilität können in der Differentialgleichung selbst oder aber im numerischen Verfahren begründet liegen. Im ersten Fall wird die Schrittweite möglichst klein gesteuert. Im zweiten Fall kann die Instabilität durch die Wahl eines geeigneten Verfahrens vermieden werden. Mit großer Schrittweite Δx wird wenig Rechenzeit benötigt, aber die Genauigkeit leidet. Die Schrittweite sollte so groß wie möglich, aber so klein wie nötig eingestellt werden. In Abb. 4.2 ist das Richtungsfeld für die Differentialgleichung $\dot{y} = ay$, die mit dem Polygonzugverfahren integriert werden soll, mit $a = -3$ dargestellt. Für kleine Schrittweiten Δx strebt die numerische Lösung deutlich gegen die analytische Lösung

$$y = y_0 e^{-3x}.$$

Wird die Schrittweite zu groß gewählt, dann wächst die Lösung über alle Grenzen, sie ist instabil geworden. Bei Stabilitätsbetrachtungen müssen nichtlineare Gleichungen bei jedem Integrations-schritt linearisiert werden. Diese Maßnahmen kosten viel Rechenzeit. Wenn also Stabilitätsunter-

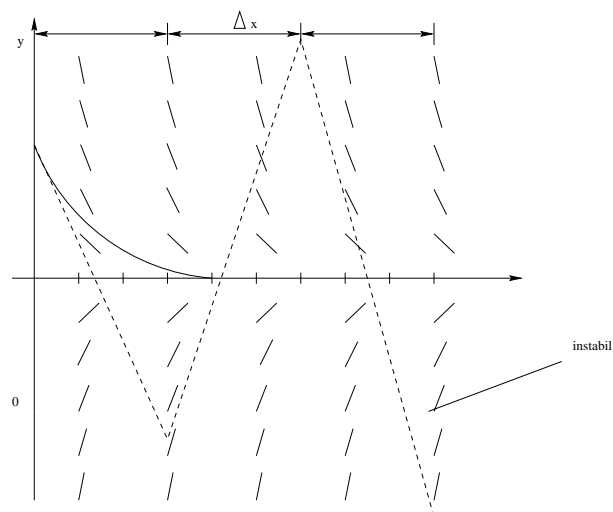


Abbildung 4.2: Richtungsfeld für die Differentialgleichung $\dot{y} = -3y$

suchungen nicht unbedingt notwendig sind, wird man gerne probieren, indem man ein Problem mit unterschiedlichen Schrittweiten berechnet [WS89].

Kapitel 5

Physikalische Objekte

In diesem Kapitel werden die physikalischen Beispielobjekte beschrieben und deren Bewegungsgleichungen mit Hilfe der in Kapitel II und Kapitel III vorgestellten Formalismen aufgestellt. Diese physikalischen Voraussetzung werden nun auf schwingende Systeme angewendet. Das einfachste Schwingungssystem ist das einfache Fadenpendel mit einem Freiheitsgrad. Weitere hier vorgestellte Systeme sind das Federpendel und das Doppelpendel. Es wird ein System von Differentialgleichungen entwickelt, so daß diese von einem numerischen Verfahren zur Berechnung der Pendelbewegungen verwendet werden können.

5.1 Pendel

Von allen Schwingungsarten ist die harmonische Schwingung die wichtigste [Kuc88]. Das kommt daher, daß sich fast alle komplizierteren Schwingungsvorgänge in der Physik und der Technik auf sie zurückführen lassen.

Zur Beschreibung von Schwingungserscheinungen werden folgende Größen benutzt:

T	Periode:	zeitliche Dauer einer vollen Schwingung
ν	Frequenz:	Schwingungsanzahl pro Sekunde.
$\omega = 2\pi\nu$	Kreisfrequenz	
y_{max}	Amplitude:	größte Auslenkung, d.h. die Entfernung zwischen Nullage und Umkehrpunkt.
y	Elongation:	Abstand von der Mittellage nach Ablauf der Zeit t

Ein einfaches Pendel ist das mathematische Pendel, bei dem die Masse des Fadens vernachlässigt und die Masse des Pendelkörpers als praktisch punktförmig angesehen wird. Das Fadenpendel ist ein klassisches Beispiel für eine harmonische Schwingung. Für kleine Auslenkungswinkel gilt ein besonders einfacher Zusammenhang:

Die aufzuwendende Kraft ist proportional zur Elongation. Immer wenn ein lineares Kraftgesetz vorliegt, heißt die auftretende Schwingung *harmonisch*.

Der zeitliche Verlauf einer Schwingung wird durch die Gleichung

$$y = y_{max} \sin(\omega t) \quad (5.1)$$

beschrieben.

5.1.1 Die Generalisierten Koordinaten des Pendels

Der Massenpunkt, der an einem Faden der Länge l hängt und unter der Wirkung der Schwerkraft in einer vertikalen Ebene schwingt, muß die, in Zylinderkoordinaten p, α, z formulierten, Nebenbedingungen

$$g_1 = z = 0 \quad (5.2)$$

$$g_2 = p - l = 0 \quad (5.3)$$

erfüllen. Die Bewegung des Massenpunktes ist somit auf einen Kreis beschränkt, so daß für den einzigen Freiheitsgrad sich als generalisierte Koordinate der Winkel α anbietet.

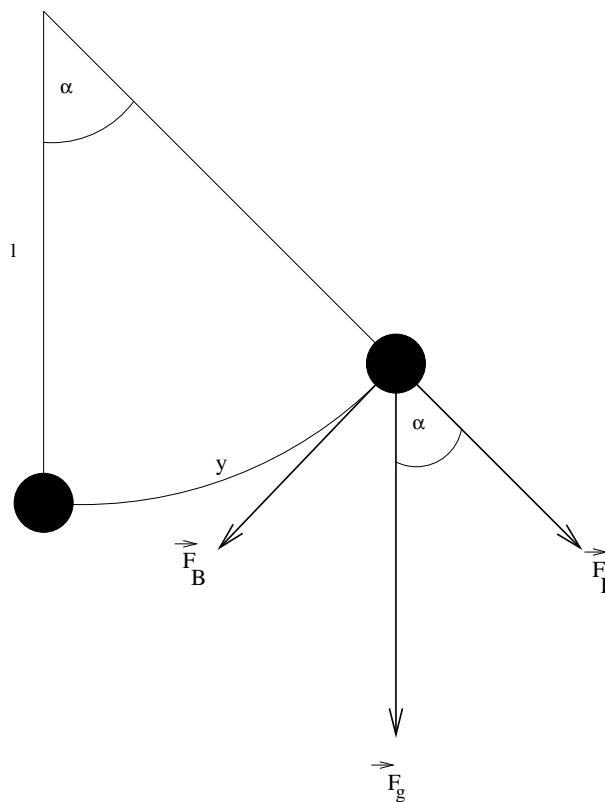


Abbildung 5.1: einfaches Fadenpendel

5.1.2 Die Bewegungsgleichung des Pendels

Nach der dynamischen Grundgleichung der Mechanik ist die Kraft F der Beschleunigung a proportional, die ein Körper unter dem Einfluß von F erfährt. Der Proportionalitätsfaktor ist die (träge) Masse m des Körpers. Bei einem Fadenpendel Abb.5.1 ist die Gewichtskraft der Pendelmasse die einzige Kraft die vorhanden ist. Diese beträgt:

$$F_g = mg. \quad (5.4)$$

Sie zeigt senkrecht nach unten, wobei g die Erdbeschleunigung ist. Doch es wird die rücktreibende Kraft F_B benötigt, d.h. die Kraft, die das Pendel in die Ruhelage zurückführt. Die Bahn des Pendels ist durch den Radius l b.z.w. durch die Länge des Fadens festgelegt. Durch die Komponentenzerlegung der Gewichtskraft in Richtung Bahn \vec{F}_B und in Richtung Faden \vec{F}_F , die nichts zur Beschleunigung der Masse beträgt, gilt für die rücktreibende Kraft:

$$F_B = F_g \sin \alpha. \quad (5.5)$$

Es gilt

$$F_B = -m\ddot{y}, \quad (5.6)$$

die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit ist die Beschleunigung, und das negative Vorzeichen entspricht der Tatsache, daß die Kraft der Auslenkung y entgegengesetzt ist. Mit

$$\alpha = \frac{y}{l} \quad (5.7)$$

und der Gleichung (5.4) folgt die Bewegungsdifferentialgleichung des einfachen Fadenpendels:

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l} \sin \alpha. \quad (5.8)$$

Durch Einführung einer neuen Variablen ϕ wird aus der Differentialgleichung (5.8) 2.Ordnung ein System von 2 Differentialgleichungen 1.Ordnung:

$$\dot{\alpha} = \phi \quad (5.9)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{g}{l} \sin \alpha. \quad (5.10)$$

Diese Funktion können somit zur Integration einem numerischen Verfahren angeboten werden.

Für kleine Werte von α ist $\sin \alpha \approx \alpha$. Für die Differentialgleichung der Pendelschwingung¹ folgt

$$\ddot{y} = -\frac{g}{l}y \quad (5.11)$$

sie hat mit Amplitude y_{max} und Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ die Lösung

$$y = y_{max} \sin(\omega t) \quad (5.12)$$

Insbesondere hängt die Schwingungsdauer T eines Fadenpendels nicht von seiner Masse m ab, sondern nur von der Länge des Fadens l und der Erdbeschleunigung g , für sie gilt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (5.13)$$

¹ $F(x) = -D \cdot x$: Kraft um Auslenkung x zu erreichen, mit Direktionskraft D .
 $\ddot{x} = -\frac{D}{m}$: Gleichung des ungedämpften harmonischen Oszillators

5.2 Das Doppelpendel

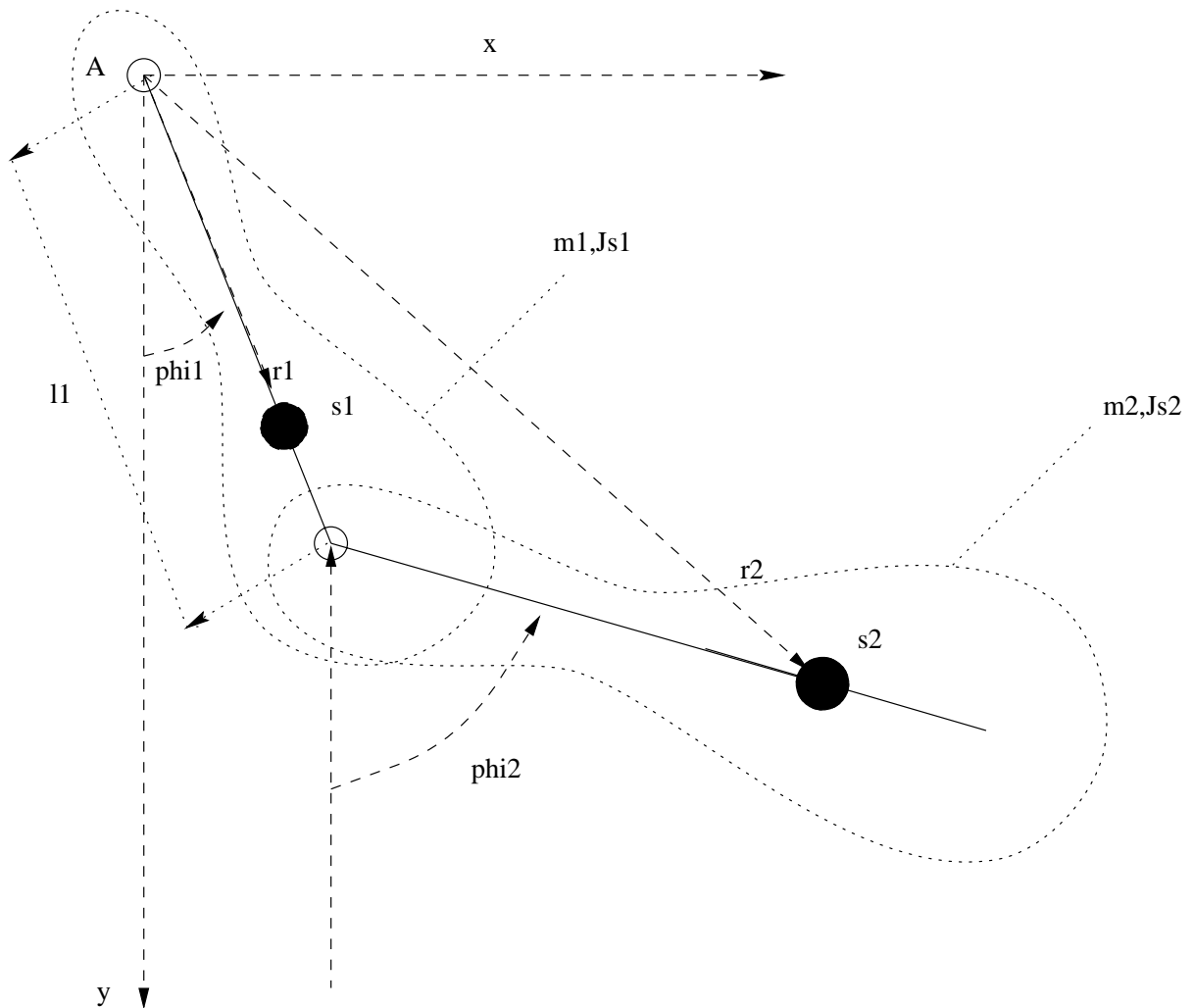


Abbildung 5.2: Doppelpendel

Ein Doppelpendel Abb.5.2 wird definiert durch die beiden Pendelmassen m_1 und m_2 , die auf die jeweiligen Schwerpunkte bezogenen Massenträgheitsmomente J_{s_1} und J_{s_2} , die Schwerpunktabstände von den Drehpunkten s_1 und s_2 und den Abstand l_1 der beiden Drehpunkte [Dan95].

5.2.1 Generalisierte Koordinaten des Doppelpendels

Das Doppelpendel Abb.5.2 hat zwei Freiheitsgrade. Als generalisierte Koordinaten eignen sich z.B. die beiden Winkel φ_1 und φ_2 .

Für das Aufschreiben der kinetischen Energie werden beide Pendelbewegungen als Translation

des jeweiligen Schwerpunkts mit überlagerter Rotation betrachtet.

Die Position der Schwerpunkte sind durch die Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 bestimmt:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} s_1 \sin \varphi_1 \\ s_1 \cos \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} l_1 \sin \varphi_1 + s_2 \sin \varphi_2 \\ l_1 \cos \varphi_1 + s_2 \cos \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Die Komponenten der Geschwindigkeitsvektoren ergeben sich aus den Komponenten der Vektoren \vec{r} durch Differenzieren nach der Zeit:

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

$$\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Diese lassen sich zu den Bahngeschwindigkeiten der Schwerpunkte zusammenfassen:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= v_{1x}^2 + v_{1y}^2 \\ &= s_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \cos^2 \varphi_1 + s_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \sin^2 \varphi_1 \\ &= s_1^2 \dot{\varphi}_1^2, \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} v_2^2 &= v_{2x}^2 + v_{2y}^2 \\ &= l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + s_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 s_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \quad (5.19)$$

5.2.2 Energien des Doppelpendels

Mit Hilfe der Orts- und Geschwindigkeitsvektoren kann nun die kinetische und potentielle Energie aufgeschrieben werden.

Für die kinetische Energie des Gesamtsystems gilt:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} J_{s1} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J_{s2} \dot{\varphi}_2^2. \quad (5.20)$$

Für das Aufschreiben der potentiellen Energie wird das Null-Potential auf die Höhe des Punktes A gelegt, so daß beide Anteile negativ werden:

$$U = -m_1 g s_1 \cos \varphi_1 - m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + s_2 \cos \varphi_2) \quad (5.21)$$

Die Lagrangesche Funktion kann formuliert werden:

$$\begin{aligned}
 L = T - U &= \frac{1}{2}m_1s_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_{s1}\dot{\varphi}_1^2 \\
 &+ \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + s_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1s_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \\
 &+ \frac{1}{2}J_{s2}\dot{\varphi}_2^2 + m_1gs_1 \cos \varphi_1 \\
 &+ m_2g(l_1 \cos \varphi_1 + s_2 \cos \varphi_2).
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Für die beiden Lagrangeschen Gleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0, \tag{5.23}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0, \tag{5.24}$$

werden nun die benötigten Ableitungen bereitgestellt:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = m_1s_1^2\dot{\varphi}_1 + J_{s1}\dot{\varphi}_1 + m_2l_1^2\dot{\varphi}_1 + m_2l_1s_2\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) &= m_1s_1^2\ddot{\varphi}_1 + J_{s1}\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1s_2\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\
 &- m_2l_1s_2\dot{\varphi}_2(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2)
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -m_2l_1s_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_1gs_1 \sin \varphi_1 - m_2gl_1 \sin \varphi_1 \tag{5.27}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2s_2^2\dot{\varphi}_2 + J_{s2}\dot{\varphi}_2 + m_2l_1s_2\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) &= m_2s_2^2\ddot{\varphi}_2 + J_{s2}\ddot{\varphi}_2 + m_2l_1s_2\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\
 &- m_2l_1s_2\dot{\varphi}_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2)
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = m_2l_1s_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2gs_2 \sin \varphi_2. \tag{5.30}$$

5.2.3 Die Bewegungsgleichung

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichung für das Pendelsystem mit zwei Freiheitsgrade werden folgende Bezeichnung benötigt:

$$a_{11} = \left(\frac{s_1}{l_1}\right)^2 + \frac{J_{s_1}}{m_1 l_1^2} + \frac{m_2}{m_1} \quad (5.31)$$

$$a_{12} = \frac{m_2}{m_1} \frac{s_2}{l_1} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (5.32)$$

$$a_{22} = \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{s_2}{l_1}\right)^2 + \frac{J_{s_2}}{m_1 l_1^2} \quad (5.33)$$

$$b_1 = -\frac{m_2}{m_1} \frac{s_2}{l_1} \varphi_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \left(\frac{s_1}{l_1} + \frac{m_2}{m_1}\right) \frac{g}{l_1} \sin \varphi_1 \quad (5.34)$$

$$b_2 = \frac{m_2}{m_1} \frac{s_2}{l_1} \varphi_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{m_2}{m_1} \frac{s_2}{l_1} \frac{g}{l_1} \sin \varphi_1 \quad (5.35)$$

Mit Hilfe dieser Bezeichnung und den beiden Lagrangeschen Gleichungen kann nun das Bewegungsgleichungssystem des Doppelpendels aufgestellt werden:

$$a_{11}\ddot{\varphi}_1 + a_{12}\ddot{\varphi}_2 = b_1 \quad (5.36)$$

$$a_{12}\ddot{\varphi}_1 + a_{22}\ddot{\varphi}_2 = b_2 \quad (5.37)$$

Durch Einführen der neuen Variablen

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 \quad (5.38)$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi}_2 \quad (5.39)$$

bzw.

$$\dot{\omega}_1 = \ddot{\varphi}_1 \quad (5.40)$$

$$\dot{\omega}_2 = \ddot{\varphi}_2 \quad (5.41)$$

wird aus den beiden Differentialgleichungen 2.Ordnung ein System von 4 Differentialgleichungen 1.Ordnung:

$$\dot{\phi}_1 = \omega_1 \quad (5.42)$$

$$\dot{\phi}_2 = \omega_2 \quad (5.43)$$

$$a_{11}\dot{\omega}_1 + a_{12}\dot{\omega}_2 = b_1 \quad (5.44)$$

$$a_{12}\dot{\omega}_1 + a_{22}\dot{\omega}_2 = b_2. \quad (5.45)$$

Die beiden in den Ableitungen gekoppelten Differentialgleichungen werden entkoppelt:

$$\dot{\omega}_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{\det \bar{A}}, \quad (5.46)$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{12} b_1}{\det \bar{A}} \quad (5.47)$$

mit

$$\det \bar{A} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2, \quad (5.48)$$

so daß die vom Differentialgleichungssystem bereitgestellten Funktion nun durch ein numerisches Verfahren integriert werden können.

5.3 Federpendel

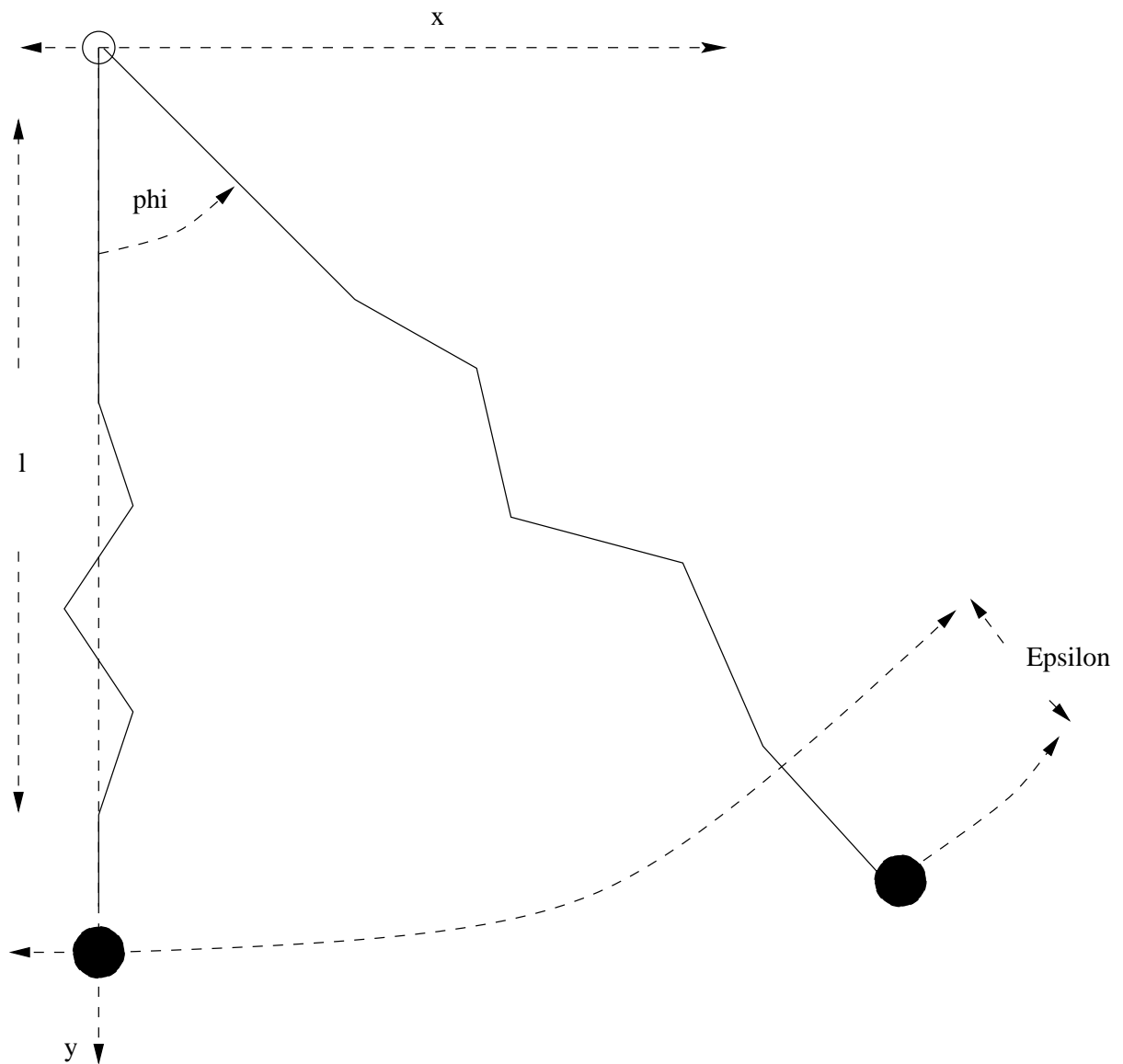


Abbildung 5.3: Federpendel

Ein Federpendel Abb.5.3 wird definiert durch die Pendelmasse m , der Federkonstanten D und der Gewichtslänge l der Feder bei Belastung mit mg .

5.3.1 Generalisierte Koordinaten des Federpendels

Das Federpendel hat zwei Freiheitsgrade. Als generalisierte Koordinaten eignen sich der Winkel φ und die Federausdehnung ε . Die Position des Massenpunktes wird durch den Vektor \vec{r} bestimmt:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} (l + \varepsilon) \sin \varphi_1 \\ (l + \varepsilon) \cos \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad (5.49)$$

Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix}, \quad (5.50)$$

ergeben sich aus den Komponenten der Vektoren \vec{r} durch Differenzieren nach der Zeit. Sie lassen sich zu der Bahngeschwindigkeit des Massenpunktes zusammenfassen:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_{1x}^2 + v_{1y}^2 \\ &= s_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \cos^2 \varphi_1 + s_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \sin^2 \varphi_1 \\ &= (l + \varepsilon)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{\varepsilon}^2 \end{aligned} \quad (5.51)$$

5.3.2 Energien des Federpendels

Mit der Bahngeschwindigkeit des Massenpunktes kann die kinetische Energie des Gesamtsystems aufgeschrieben werden:

$$T = \frac{m}{2} ((l + \varepsilon)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{\varepsilon}^2). \quad (5.52)$$

Die potentielle Energie besteht aus der Verformungsenergie

$$\frac{D\varepsilon^2}{2}, \quad (5.53)$$

die die rein vertikale Auf- und Abschwingung im Schwerkraftfeld berücksichtigt, und dem durch die Winkelbewegung verursachten Beitrag

$$mg(l + \varepsilon)(1 - \cos \varphi),$$

der die Änderung der Lageenergie gegenüber der vertikalen Schwingung wiedergibt. Somit ergibt sich für die potentielle Energie:

$$U = \frac{D\varepsilon^2}{2} + mg(l + \varepsilon)(1 - \cos \varphi). \quad (5.54)$$

Die Lagrangesche Funktion kann formuliert werden:

$$L = T - U = \frac{m}{2}((l + \varepsilon)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{\varepsilon}^2) - \frac{D\varepsilon^2}{2} - mg(l + \varepsilon)(1 - \cos \varphi) \quad (5.55)$$

Für die beiden Lagrangeschen Gleichungen 2.Art

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad (5.56)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varepsilon}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (5.57)$$

werden die wiederum benötigten Ableitungen bereitgestellt:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(l + \varepsilon)^2 \dot{\varphi} \quad (5.58)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m(l + \varepsilon)^2 \ddot{\varphi} + m(l + \varepsilon)2\dot{\varphi}\dot{\varepsilon} \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mg(l + \varepsilon) \sin \varphi \quad (5.60)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varepsilon}} = m\dot{\varepsilon} \quad (5.61)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varepsilon}} \right) = m\ddot{\varepsilon} \quad (5.62)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} = m(l + \varepsilon)\dot{\varphi}^2 - D\varepsilon - mg(1 - \cos \varphi) \quad (5.63)$$

5.3.3 Die Bewegungsgleichung

Mit den beiden Lagrangeschen Gleichungen ergeben sich für die Beschleunigungen:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{l + \varepsilon}(2\dot{\varphi}\dot{\varepsilon} + g \sin \varphi) \quad (5.64)$$

$$\ddot{\varepsilon} = (l + \varepsilon)\dot{\varphi}^2 - g(1 - \cos \varphi) + \frac{D}{m}\varepsilon. \quad (5.65)$$

Durch Einführen der Variablen :

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \quad (5.66)$$

$$\omega_2 = \dot{\varepsilon} \quad (5.67)$$

bzw.

$$\dot{\omega}_1 = \ddot{\varphi} \quad (5.68)$$

$$\dot{\omega}_2 = \ddot{\varepsilon} \quad (5.69)$$

kann nun das Differentialgleichungssystem 1.Ordnung formuliert werden:

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \quad (5.70)$$

$$\omega_2 = \dot{\varepsilon} \quad (5.71)$$

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{1}{l+\varepsilon}(2\omega_1\omega_2 + g \sin \varphi) \quad (5.72)$$

$$\dot{\omega}_2 = (l+\varepsilon)\omega_1^2 - g(1 - \cos \varphi) + \frac{D}{m}\varepsilon. \quad (5.73)$$

Diese Funktionen werden wiederum zur Integration an ein numerisches Verfahren übergeben.

Kapitel 6

Zusammenfassung

Prinzipiell können alle Aufgaben der klassischen Mechanik mit den drei Newtonschen Axiomen gelöst werden. Allerdings ist die praktische Behandlung von Massenpunktsystemen mit verwickelten Nebenbedingungen oft zu beschwerlich, wünschenswert war die Ausarbeitung weiterer Prinzipien, die die Kenntnis der Zwangskräfte nicht mehr benötigen. Zur Berechnung von Bewegungsgleichungen physikalischer Systeme hat sich herausgestellt, dass der Lagrangeformalismus II. Art, Kern einer analytischen Mechanik, ein ideales Werkzeug bereitstellt zur Analyse bewegter mechanischer Systeme. Die Lagrangegleichungen II. Art, die der Aufstellung von Bewegungsgleichungen für Systeme mit holonomen Nebenbedingungen optimal angepaßt sind, wurden aus der d'Alembertgleichung abgeleitet. Die Bewegungsgleichung der hier vorgestellten Objekte konnten mit Hilfe dieses Formalismus berechnet werden. Die vorgestellte Vorgehensweise des Algorithmus nach Lagrange verlangte die Herausarbeitung der potentiellen und kinetischen Energien der Objekte, dies hatte den Vorteil, daß Zwangskräfte von vornherein nicht berücksichtigt werden müssen. Die Bewegungsgleichungen können somit ohne die Anwendung weiterer Prinzipien direkt aufgestellt werden. Zur Integration der Gleichungen wird das numerische Einschrittverfahren Runge-Kutta verwendet. Eine Erweiterbarkeit der Objekte ist in der Fülle der physikalischen Phänomene gegeben. Jedes mechanische System verlangt seine eigene Analyse. Denkbar in diesem Zusammenhang ist eine Ausweitung der erarbeiteten Prinzipien. Denn z.B. wird in der Robotik der Weg der Bewegungsbeschreibung durch die Energien eines mechanischen Systems eventuell zu aufwendig sein, so daß auf die Newtonsche Gleichung für starre Körper zugegriffen werden muss. Ist aber die Kenntnis der Zwangskräfte notwendig, wird die Erarbeitung der Lagrangeformalismus I. Art oder des Prinzip von Jourdain erforderlich sein, welche auch bei der Behandlung nicht-holonomer Systeme anwendbar sind. Dies ist allerdings kein zu großer Nachteil, da mechanische Systeme in der überwiegenden Mehrzahl holonome Bedingungen enthalten.

Weiterhin ist es für einen Konstrukteur besonders wichtig, sich die Zusammenhänge von den unterschiedlichen dynamischen Abläufen zu erarbeiten, um schließlich nach Durchdenken vieler Aufgabenstellungen genügend Erfahrung zu gewinnen, physikalische Vorgänge sofort, mehr oder weniger intuitiv, analysieren zu können. Auf diese Weise wird man ein Gefühl für physikalische Zusammenhänge, z.B. von Schwingungsvorgängen, bekommen. Dieses Gefühl kann sonst nur an wirklichen schwingenden Teilen erworben werden. Mit der Rechnersimulation, für die mindestens ein Arbeitsplatzrechner mit graphischer Ausgabemöglichkeit benötigt wird, steht nun ein

leistungsfähiges Werkzeug zur Verfügung. Mit wenig Programmieraufwand ist man in der Lage, z.B. Schwingungsphänomene anschaulich darzustellen. Es können Hilfsmittel erzeugt werden, das durch spielerische Handhabung dem Anwender Zugang zu schwierigen Wirkungszusammenhänge verschafft.

Anhang A

Implementation der numerischen Methode

Die Klasse `t_NumericalInt` realisiert die allgemeine numerische Runge-Kutta Methode.

```
const int maxVariablenForNumInt
```

wird als maximale Anzahl der Bewegungsdifferentialgleichungen eines physikalischen Objektes definiert.

```
class t_NumericalInt
```

Klasse einer Methode zur numerischen Integration

```
virtual
```

```
void differentialFCT(t_Real* X, t_Real* XP){}
```

Abfrage des Differentialgleichungssystems der physikalischen Objekte. `X` ist das array der Variablen. `XP` ist das array der Differentiale.

```
protected:
```

```
void RungeKutta_nXn( t_Real *X,  
                    t_Real *XP,  
                    t_Real DT ,  
                    int    n    )
```

Abfrage der allgemeinen Runge-Kutta Methode. `DT` ist die unabhängige Schrittweite, `n` die Anzahl der Gleichungen und damit auch die Größe der Vektoren `X` und `XP`. `HV1` und `HV2` sind Hilfsvektoren, die Zwischenergebnisse der Integration speichern. Die allgemeine Runge-Kutta-Methode wird, wie in Kapitel IV beschrieben, ausgeführt.

```
{  
    t_Real DT2    = 0.5*DT;  
    t_Real HV1[maxVariablenForNumInt];  
    t_Real HV2[maxVariablenForNumInt];  
    unsigned i;
```

```
//K1
differentialFCT(X,XP);
  for(i = 0; i < n; i++) {
    HV1[i] = X[i] + DT/6 * XP[i];
    HV2[i] = X[i] + DT2 * XP[i];
  }

//K2
differentialFCT(HV2,XP);
  for(i = 0; i < n; i++) {
    HV1[i] = HV1[i] + DT/3 * XP[i];
    HV2[i] = X[i] + DT2 * XP[i];
  }
//K3
differentialFCT(HV2,XP);
  for(i = 0; i < n; i++) {
    HV1[i] = HV1[i] + DT/3 * XP[i];
    HV2[i] = X[i] + DT * XP[i];
  }
//K4
differentialFCT(HV2,XP);
  for(i = 0; i < n; i++) {
    X[i] = HV1[i] + DT/6 * XP[i];
  }
}
```

Anhang B

Klassen der Beispielobjekte

Hier werden die Klassen der in Kapitel V beschriebenen Beispielobjekte aufgeführt. Die Klassen sind von der Klasse `t_NumericalInt` abgeleitet. Die jeweiligen Differentialgleichungen werden in `differentialFCT` realisiert und von der allgemeinen Runge-Kutta-Methode abgefragt. Die graphischen Komponenten sind aus diesen Basisklassen herausgelöst. Sie werden in abgeleiteten Klassen realisiert

B.1 `t_Pendulum`

`t_Pendulum` realisiert die in Kapitel V beschriebene einfache Pendelschwingung.

```
class t_Pendulum : public t_NumericalInt
public:
t_Pendulum      (const t_3Dvector& anchor      = t_3DVector(0,0,0),
                 const t_3Dvector& oscillator= t_3DVector(0,-1,0))
```

Erzeugt ein einfaches Pendel mit Aufhängepunkt bei `anchor` und Schwerpunkt bei `oscillator`. Der Faden wird als Schwerelos angenommen.

```
t_Real          nullPosition   () const
void            nullPosition   (const t_Real& null)
t_3Dvector      nullOscillator () const
void            nullOscillator (const t_3DVector& nullOsci)
```

Abfragen und Setzen der Ruhepostion.

```
t_4x3Matrix     physicalFunctionMatrix()
```

Abfrage der Transformationsmatrix für den `NullOscillator`. Der Winkel ist die momentane Elongation des `Oscillators` unter Verwendung eines numerischen Verfahrens.

```
t_4x3Matrix     physicalFunctionMatrix(const t_Real& time)
```

Abfrage der Transformationsmatrix für den `NullOscillator` unter Verwendung eines analytischen Verfahrens.

```
void          mass      (const t_Real& mass)
t_Real       mass      () const
```

Setzen und Abfragen des Massenschwerpunktes. Die Einheit der Masse ist kg mit:
default mass = 1.

```
t_3Dvector   anchor    () const
void         anchor    (const t_3DVector& anchor)
t_3Dvector   oscillator () const
void         oscillator (const t_3DVector& oscillator)
```

Setzen und Abfragen des Aufhängepunktes und des Oszillators. `anchor` modifiziert gleichzeitig den Oszillator. `oscillator` modifiziert die Länge des Pendels.

```
t_Real       elongation () const
void         elongation (const t_Real& anchor)
```

Setzen und Abfragen der Elongation, d.h. des momentanen Ausschlages des Pendels.
Ist nur Sinnvoll bei einer numerischen Anwendung.

```
t_Real       amplitude () const
void         amplitude (const t_Real& amplitude)
```

Setzen und Abfragen der Amplitude, d.h. der maximalen Elongation.

```
t_2DVector   direction () const
void         direction (const t_2DVector& direction)
```

Setzen und Abfragen der Schwingungsrichtung in der XZ-Ebene.

```
void         setByOscillator (const t_3DVector& oscillator)
```

Modifiziert durch Setzen des Oszillators die Schwingungsrichtung, Länge, Amplitude und die Elongation des Pendels.

```
t_Real       length    () const
void         length    (const t_Real& length)
```

Abfragen und Setzen der Pendellänge.

```
t_Real       frequency () const
void         frequency (const t_Real& frequency)
t_Real       velocity   () const
void         velocity   (const t_Real& velocity)
t_Real       friction   () const
void         friction   (const t_Real& friction)
```

Setzen und Abfragen der physikalischer Eigenschaften des Pendels.

```
void                physicalSettings()
```

Setzen der Pendelfrequenz $= \frac{1}{T}, T = 2\pi\sqrt{\left(\frac{l}{g}\right)}$, und setzen des Beschleunigungsfaktors $v_acceleration$ auf $\frac{g}{7}$, mit g als Erdbeschleunigung $= 9.81$ und l als Länge des Fadens.

```
t_Real            factorOfAcceleration () const
void              factorOfAcceleration (const t_Real& acceleration)
```

Setzen und Abfragen des Beschleunigungsfaktors $v_acceleration$

```
void              move            (const t_Real& time)
```

Modifiziert den Oszillator unter Verwendung der analytischen Lösung.

```
virtual void      move            ()
```

Modifiziert den Oszillator unter Verwendung der momentanen elongation.

```
virtual void      step            (const t_Real& timeStep)
```

Berechnet die nächste elongation und velocity des Pendels unter Verwendung der numerischen Lösung mit Schrittweite $timeStep$.

```
protected:
```

```
virtual void      differentialFCT (t_Real* X, t_Real* XP)
```

Stellt das Bewegungsgleichungssystem des Pendels mit folgenden Gleichungen zur Verfügung:

```
{
    XP[0] = X[1];
    XP[1] = -v_acceleration * sin(X[0]) - v_friction * X[1];
}
```

B.2 t_doublependulum

```
class t_DoublePendulum : public t_Pendulum
```

$t_DoublePendulum$ realisiert das in Kapitel V beschriebene Doppelpendel.

```
public:
```

```
t_DoublePendulum (t_Pendulum* pendulum1, t_Pendulum* pendulum2 )
```

Initialisiert das Doppelpendel mit Hilfe der beiden einfachen Pendel $pendulum1$ und $pendulum2$.

```
t_Real            ratioOfMasses    () const
void              ratioOfMasses    (const t_Real& mass2DivMass1)
```

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichung des Doppelpendels wird das Verhältnis der Massen der beiden Pendel benötigt.

```
t_Real      inertia_j1      () const
t_Real      inertia_j2      () const
void        inertia_j1      (const t_Real& inertia)
void        inertia_j2      (const t_Real& inertia)
```

Setzen und Abfrage der Trägheitsmomente: default = $\frac{1}{12}$.

```
t_Real      centerOfGravity_s1 () const
t_Real      centerOfGravity_s2 () const
void        centerOfGravity_s1 (const t_Real& center)
void        centerOfGravity_s2 (const t_Real& center)
```

Setzen und Abfrage des Abstandes des Schwerpunktes vom Aufhängepunkt.

```
const t_Real distanceOfRotatingPoints () const;
void         distanceOfRotatingPoints (const t_Real& length);
```

Setzen und Abfrage des Abstandes zwischen den beiden Rotationspunkte.

```
void         step           (t_Real timeStep)
```

Berechnung der elongation und velocity der beiden Pendel unter Verwendung der numerischen Lösung mit Schrittweite timeStep.

```
virtual void differentialFCT (t_Real* X,t_Real* XP)
```

Stellt das Bewegungsgleichungssystem des Doppelpendels, wie in Kapitel V beschrieben, mit folgenden Gleichungen zur Verfügung.

```
{
    t_Real a12 = v_mdm*v_s2*cos(X[0]-X[1]);
    t_Real det = v_a11*v_a22-a12*sqr(a12);
    t_Real b1  = -v_mdm*v_s2*sqr(X[3])*sin(X[0]-X[1]) -
                (v_s1+v_mdm)*v_gdl*sin(X[0]);
    t_Real b2  = v_mdm*v_s2*sqr(X[2])*sin(X[0]-X[1]) -
                v_s2*v_mdm *v_gdl*sin(X[1]);

    XP[0]     = X[2];
    XP[1]     = X[3];
    XP[2]     = (b1*v_a22-b2*a12)/det - friction() * X[2];
    XP[3]     = (b2*v_a11-b1*a12)/det - friction() * X[3];
}
```

B.3 t_featherpendulum

```
class t_FeatherPendulum : public t_Pendulum
```

t_FeatherPendulum realisiert ein Federpendel.

public:

```
t_FeatherPendulum (const t_3DVector& anchor = t_3DVector(0,0,0),
                  const t_3DVector& oscillator=t_3DVector(1,0,0))
```

Initialisiert das Federpendel mit Aufhängepunkt bei anchor und mit Federkonstante = 15.

```
t_Real          featherconst    () const
void            featherconst    (const t_Real& featherconst)
t_Real          extension       () const
void            extension       (const t_Real& extension)
t_Real          velOfFeath      () const
void            velOfFeath      (const t_Real& velOfFeath)
```

Setzen und Abfrage der physikalischen Eigenschaften der Feder: Federkonstante, Dehnung und Geschwindigkeit.

protected:

```
virtual void    differentialFCT (t_Real* X, t_Real* XP)
```

Abfrage des Bewegungsgleichungssystems des Federpendels mit folgenden Gleichungen:

```
{
  XP[0] = X[2];
  XP[1] = X[3];
  XP[2] = (v_length+X[0])*sqr(X[3])+9.81*(cos(X[1]))-v_DdM*X[0]
          -friction() * X[2];
  XP[3] = (-9.81*sin(X[1])-2*X[2]*X[3])/(length()+X[0])
          -friction() * X[3];
}
```

Anhang C

Graphische Darstellung

Zur graphischen Darstellung werden die graphischen Komponenten der Objekte in abgeleiteten Klassen der Implementierten Basisklassen realisiert.

C.1 Hilfsklassen

```
typedef t_Cgi* DisplayDevicePtr;
```

Definition eines allgemeinen DevicePointers. In diesem Fall ein Pointer auf CGI.

Zur Darstellung unter CGI werden folgende Hilfsklassen verwendet:

```
t_Cube
```

Definition eines einfachen Würfelgitter zur Überprüfung der Bewegungsausführung der Objekte.

```
t_Ball
```

Definition einer Kugel zur Visualisierung der geographischen Komponenten eines Objektes.

Die folgenden abgeleiteten Klassen erhalten als Parameter den `DisplayDevicePtr` und die Objektspezifischen Komponenten.

```
class t_DrawSimplePendulum:    public t_Pendulum
class t_DrawDoublePendulum:   public t_DoublePendulum
class t_DrawFeatherPendulum:  public t_FeatherPendulum
```

```
void draw(const t_Color& color);
```

Einzige Memberfunktion der abgeleiteten Klassen. Zeichnet gegebenes Objekt mit Farbe `color`.

C.2 Beispielanwendung

Mit folgenden Programmausschnitt werden die definierten Objekte unter CGI dargestellt:

```
#include "cgi.hh"
#include "t_camera.hh"
#include "t_drspen.hh"
#include "t_drfepe.hh"
#include "t_drdpen.hh"

int main ()
{
//...
// --- start settings ---
t_Real stepWidth          = 0.008;

// --- simplePendulum ---
t_DrawSimplePendulum simple(cgi, camera,
                             t_3DVector(0, 0, 0),
                             t_3DVector(0, -1, 0));

// --- featherPendulum ---
t_DrawFeatherPendulum featherpendulum (cgi, camera,
                                         t_3DVector(0.0, 0.7, 0.0),
                                         t_3DVector(0.0, -0.7, 0.0));

// --- doublePendulum ---
t_Pendulum* pendel0 = new t_Pendulum (t_3DVector(0.0, 0.9, 0.0),
                                       t_3DVector(0.0, 0.0, 0.0));
t_Pendulum* pendel1 = new t_Pendulum (t_3DVector(0.0, 0.9, 0.0),
                                       t_3DVector(0.0, 0.0, 0.0));
t_DrawDoublePendulum doublependel(cgi, camera, pendel0, pendel1);

// --- loop ---
    simple.step          (stepWidth);
    doublependel.step   (stepWidth);
    featherpendulum.step(stepWidth);

//...
}
```

Abbildung C.1 und Abbildung C.2 zeigen ein Federpendel im Tracemodus mit Start-Elongation = 0.75π , Schrittweite $h = 0,05$ und unterschiedlichen Federkonstanten.

Abbildung C.3 zeigt ein Doppelpendel mit Start-Elongation $0,5\pi$ und Schrittweite $h = 0,04$.

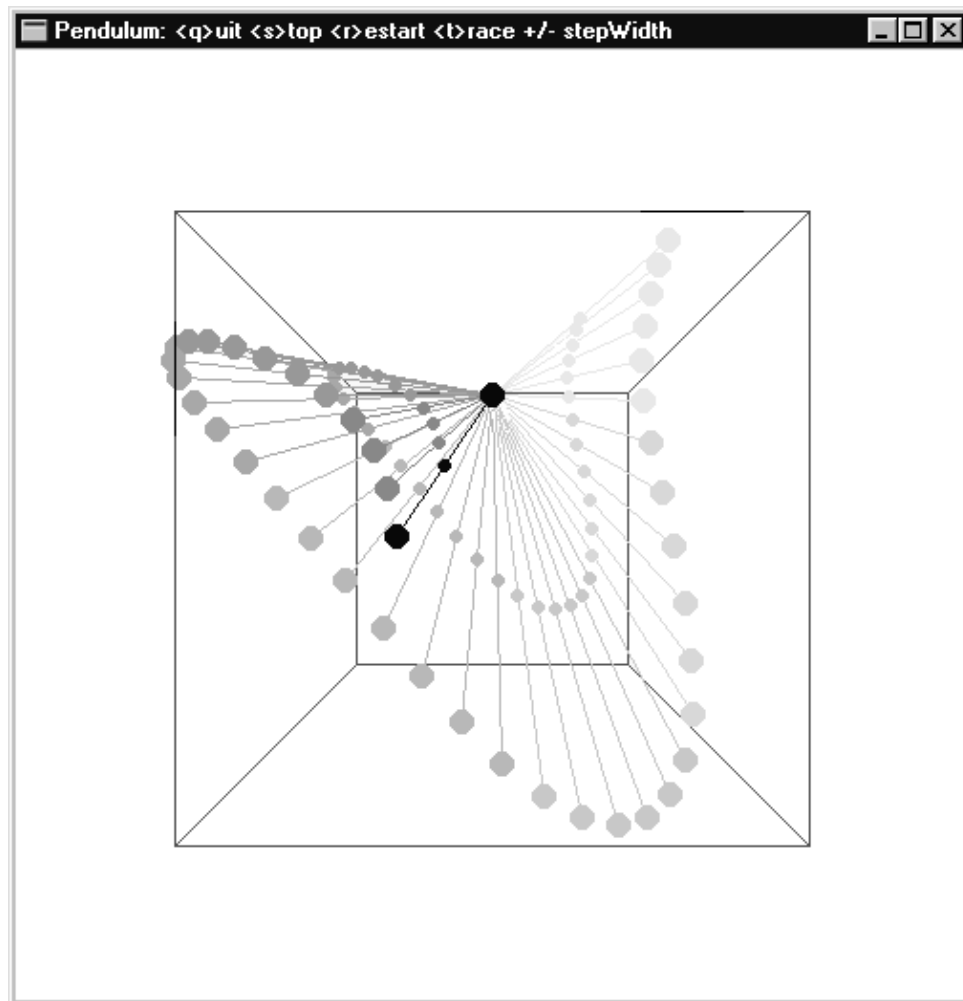


Abbildung C.1: Federpendel mit Federkonstante = 34

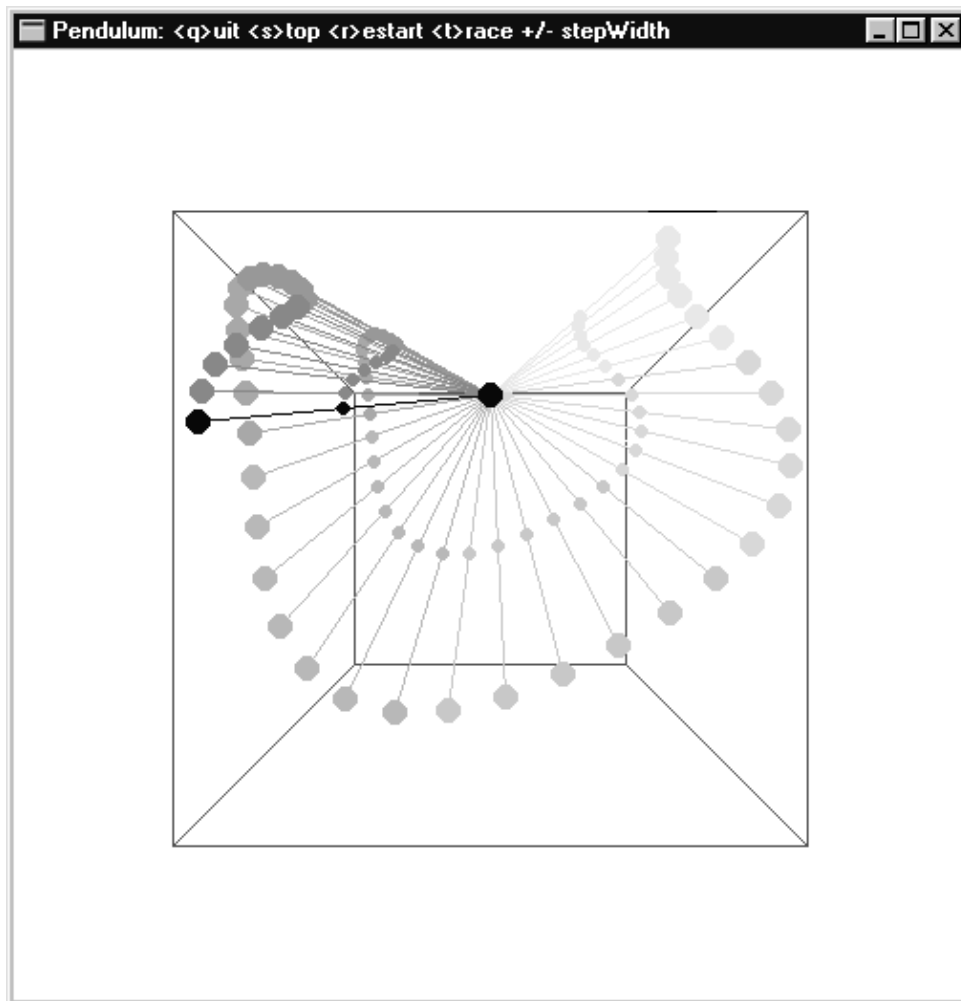


Abbildung C.2: Federpendel mit Federkonstante = 104

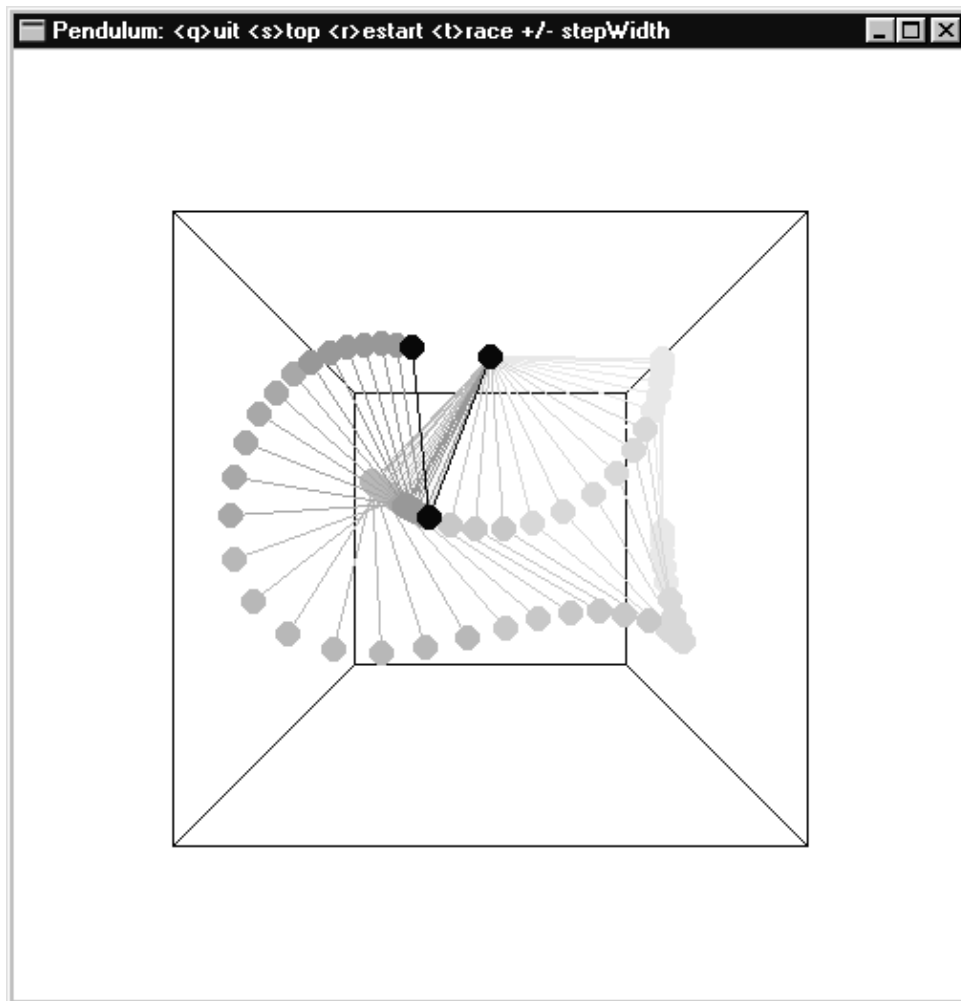


Abbildung C.3: Doppelpendel im TraceModus

Literaturverzeichnis

- [Ass90] ASSMANN A.: *Technische Mechanik*, R.Oldenbourg Verlag GmbH, München, 1990.
- [BD72] BJÖRCK A., DAHLQUIST G.: *Numerische Methoden*, R.Oldenbourg Verlag GmbH, München, 1972.
- [BG77] Böhm W., GOSE G.: *Einführung in die Methoden der numerischen Mathematik*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1977.
- [Cra73] CRAWFORD F.S.Jr. : *Schwingungen und Wellen, Berkley Physik Kurs 3*, Fried.Vieweg+Sohn GmbH Verlag, Braunschweig, 1989.
- [Dan95] DANKERT H.u.J.: *Technische Mechanik*, B.G. Teubner Verlag, Stuttgart, 1995.
- [DKV84] DOBRINSKI P., KRAKAU G, VOGEL A: *Physik für Ingenieure*, B.G.Teubner Verlag, Stuttgart, 1984.
- [ER91] ENGELS-MÜLLGES G., REUTTER F.: *Formelsammlung zur numerischen Mathematik*, BI-Wiss.-Verl., Mannheim, 1991.
- [FDFHP94] FOLEY J.D., VAN DAM A., FEINER S.K., HUGHES J.F., PHILLIPS R.L.: *Grundlagen der Computergraphik*, Addison-Wesley, Bonn, 1994.
- [Fel92] FELLNER D.W.: *Computergrafik*, 2 ed., vol. 58 of Reihe Informatik, B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1992.
- [Fel96] FELLNER D.W.: *MRT: Design Issues and Brief Reference* University of Bonn, dept. Of Computer Science, Bonn, 1996.
- [FF93] FELLNER D.W., FISCHER M.: *CGI++ A 2D Graphics Interface based on CGI* University of Bonn, dept. Of Computer Science, Bonn, 1993.
- [FFr95] FETZER A., FRÄNKEL H.: *Mathematik, Lehrbuch für Fachhochschulen*, VDI Verlag, Düsseldorf, 1995.
- [Gol91] GOLDSTEIN H.: *Klassische Mechanik*, AULA Verlag, Wiesbaden, 1991.
- [HKSS97] HUSTY M., KARGER A., SACHS H., STEINHILPER W.: *Kinematik und Robotik*, Springer Verlag, Berlin, 1997.
- [HO87] HAGGEDORN P., OTTERBEIN S. : *Technische Schwingungslehre, Lineare Schwingungen diskreter mechanischer Systeme*, Springer Verlag, Berlin, 1987.

- [Kau89] KAUSEN E.: *Numerische Mathematik mit Turbo Pascal*, Hüthig Verlag , Heidelberg, 1989.
- [KKR73] KITTEL C., KNIGHT W.D, RUDERMAN M.A: *MECHANIK I, Berkley Physik Kurs 1*, Fried.Vieweg+Sohn GmbH Verlag, Braunschweig, 1973.
- [Klo88] KLOTTER K.: *Technische Schwingungslehre, Erster Band : Einfache Schwinger Teil A : Lineare Schwingungen* , Springer Verlag, Berlin, 1988.
- [Kna92] KNAEBEL K.: *Technische Schwingungslehre*, Teubner Studienskripten, Stuttgart, 1992.
- [Kuc88] KUCHLING H.: *PHYSIK Formeln und Gesetze*, VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1988.
- [Kur98] KURTENBACH B.: *Kollisionserkennung und -reaktion physikalischer Objekte in virtuellen Umgebungen*,Diplomarbeit, Institut für Informatik, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Feb. 1998.
- [Kuy93] KUYPERS F.: *Klassische Mechanik*, VHC Verlagsgesellschaft mbH, Weinheim, 1993.
- [Sch93] SCHWARZ H.: *Numerische Mathematik*,B.G.Teubner, Stuttgart, 1993.
- [SK95] STEPHANI H., KLUGE G. : *Theoretische Mechanik*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1995.
- [Spä94] SPÄTH H.: *Numerik*,Vieweg Verlag , Braunschweig, 1995.
- [Spi79] SPIEGEL M.: *Allgemeine Mechanik, Theorie und Anwendung*, McGraw-Hill Book Company, Düsseldorf, 1979.
- [Str97] STROUSTRUP B.: *The C++ Programming Language*,3 ed., Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1997.
- [WKBB92] WITKIN A., KASS M. BARAFF D., KARR A. : *An Introduction to Physically Based Modeling* , Computer Graphics (SIGGRAPH'92), July 1992.
- [WS89] WALLER H., SCHMIDT R. : *Schwingungslehre für Ingenieure*, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1989.